Escola Tècnica Superior d’Enginyeria Industrial de Barcelona

Vibracions mecàniques

Respostes impulsional i freqüencial de sistemes d’un grau de llibertat vibratori

Joaquim M. Veciana

Salvador Cardona

2010

Departament d’Enginyeria Mecànica

Vibracions mecàniques. Respostes impulsional i freqüencial de sistemes d'un grau de llibertat vibratori

Primera edició Febrer 2010

Edita: Salvador Cardona Foix

I.S.B.N.: 978-84-693-1715-0
Dipòsit Legal: B-20939-2010

1 Introducció

Aquesta monografia inclou les respostes impulsional i freqüencial i la seva determinació en els sistemes més comuns d'un grau de llibertat vibratori, prenent com a entrada i sortida les magnituds físiques més usuals. Tant la resposta impulsional com la resposta freqüencial s'utilitzen en la determinació de la resposta de sistemes lineals davant d'una entrada genèrica.

2 Sistema amb inèrcia governada

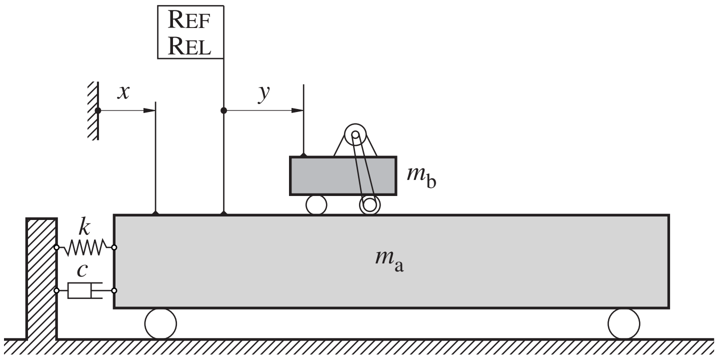

Figura 2.1 Sistema genèric de 1GL lliure amb inèrcia governada

2.1 Equació de moviment

$$(m_a + m_b)\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m_b\ddot{y} \tag{2.1}$$

Parametritzant

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{m_b}{m_a + m_b}\ddot{y} \tag{2.2}$$

amb $\omega_0 = \sqrt{k/(m_a + m_b)}$ i $\zeta = c\big/\left(2\sqrt{(m_a + m_b)k}\right)$

2.2 Respostes freqüencial i impulsional prenent com a entrada l'acceleració de la inèrcia governada i com a sortida el desplaçament de la massa lliure

Resposta freqüencial

S'aplica la Transformada de Fourier a l'equació de moviment (2.2)

$$
\begin{aligned}
&\left(-\omega^2 + \mathrm{j}\omega 2\zeta\omega_0 + \omega_0^2\right)\boldsymbol{X}(\omega) = -\frac{m_\mathrm{b}}{m_\mathrm{a} + m_\mathrm{b}}\ddot{\boldsymbol{Y}}(\omega) \\
&\boldsymbol{H}_\mathrm{s}(\omega) = \frac{\boldsymbol{X}(\omega)}{\ddot{\boldsymbol{Y}}(\omega)} = -\frac{m_\mathrm{b}}{m_\mathrm{a} + m_\mathrm{b}} \frac{1}{\left(-\omega^2 + \mathrm{j}\omega 2\zeta\omega_0 + \omega_0^2\right)}
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Resposta impulsional

La funció delta de Dirac, es defineix segons:

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = 1; \quad \delta(t) = 0 \qquad \forall t \neq 0 \tag{2.4}
$$

La metodologia emprada en aquesta monografia per a l'obtenció de la resposta impulsional considera tres trams temporals:

- Interval de temps $t \in (-\infty, 0^-]$, on es considera el sistema en repòs.
- Interval de temps $t \in (0^-, 0^+)$, on es considera que actua l'impuls descrit per la funció delta de Dirac.
- Interval de temps $t \in [0^+, \infty)$, on es considera que l'impuls ha deixat d'actuar.

Es considera que l'estat cinemàtic d'un sistema físic està en repòs quan els seus punts tenen les coordenades constants en el transcurs del temps. En aquest estat, i per comoditat a l'hora de desenvolupar les expressions, es suposen aquestes coordenades igualades a zero. Per tant, durant el primer interval de temps ($-\infty < t \leq 0^-$) totes les magnituds cinemàtiques del sistema tenen un valor nul.

Durant l'actuació de l'impuls ($0^- < t < 0^+$), segons *de Silva* (1999), la derivada de major ordre de l'equació de moviment es fa infinita momentàniament. En conseqüència, la següent derivada d'ordre inferior pren un valor finit diferent de zero en l'instant t=0^+. Les següents derivades de menor ordre es mantenen en valor nul en aquest instant, ja que no tenen temps suficient per canviar (la integral d'un valor finit, en un temps que tendeix a zero, és nul·la).

En el darrer interval de temps ($0^+ \leq t < \infty$), el sistema respon segons l'equació de moviment completa, tenint en compte les condicions inicials i d'excitació que romanen per acció de l'impuls.

En aquest cas, l'entrada impuls d'acceleració es pot expressar segons la següent expressió, on *I* és la magnitud de l'impuls:

$$
\ddot{y}(t) = I\delta(t) \tag{2.5}
$$

Durant l'actuació de l'impuls, aquest provoca una acceleració $\ddot{x}(t)$:

$$
\ddot{x}(t) = -\frac{m_\mathrm{b}}{m_\mathrm{a} + m_\mathrm{b}} I\delta(t) \qquad 0^- < t < 0^+ \tag{2.6}
$$

Això implica el següent estat en l'instant t=0^+:

$$\begin{aligned} \dot{x}(0^+) &= \int_{0^-}^{0^+} -\frac{m_\mathrm{b}}{m_\mathrm{a}+m_\mathrm{b}} I\delta(t)\,\mathrm{d}t + \dot{x}(0^-) = -\frac{m_\mathrm{b}}{m_\mathrm{a}+m_\mathrm{b}} I \\ x(0^+) &= \int_{0^-}^{0^+} -\frac{m_\mathrm{b}}{m_\mathrm{a}+m_\mathrm{b}} I\,\mathrm{d}t + x(0^-) = 0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Després de l'impuls, el sistema es mou lliurement ja que l'excitació aplicada desapareix. L'equació de moviment és:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{2.8}$$

L'equació plantejada és una equació diferencial lineal homogènia amb coeficients constants. Suposant una solució oscil·lant, les arrels de l'equació característica són $\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_0 \pm \mathrm{j}\omega_\mathrm{d}$ amb $\omega_\mathrm{d} = \omega_0(1-\zeta^2)^{1/2}$ i es resol segons:

$$x(t) = C_1 \mathrm{e}^{-\zeta\omega_0 t}\sin(\omega_\mathrm{d} t + \varphi) \tag{2.9}$$

Les seves derivades són:

$$\dot{x}(t) = \omega_0 C_1 \mathrm{e}^{-\zeta\omega_0 t}\cos(\omega_\mathrm{d} t + \varphi + \psi) \tag{2.10}$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 C_1 \mathrm{e}^{-\zeta\omega_0 t}\sin(\omega_\mathrm{d} t + \varphi + 2\psi) \tag{2.11}$$

amb $\psi = \arctan\left(\zeta \big/ \sqrt{1-\zeta^2}\right)$.

C_1 i φ depenen de les condicions inicials del moviment que prenen els valors indicats en (2.7). Avaluant (2.9) i (2.10) per a t=0^+ s'obté:

$$\varphi = 0; \quad C_1 = -\frac{m_\mathrm{b}}{m_\mathrm{a}+m_\mathrm{b}}\frac{I}{\omega_0\cos\psi} \tag{2.12}$$

La resposta impulsional es defineix com la resposta del sistema per a una entrada impuls dividida per la magnitud del impuls. És important destacar que la resposta impulsional compren l'interval de temps $t \in (0^-, \infty)$ i, per tant, inclou l'instant on actua l'impuls. En aquest cas és:

$$h_\mathrm{s}(t) = -\frac{m_\mathrm{b}}{m_\mathrm{a}+m_\mathrm{b}}\frac{1}{\omega_0\cos\psi}\mathrm{e}^{-\zeta\omega_0 t}\sin(\omega_\mathrm{d} t) \tag{2.13}$$

2.3 Resum de les respostes freqüencials i impulsionals prenent com a entrada l'acceleració de la inèrcia governada i com a sortida, diverses magnituds cinemàtiques de la massa lliure

En la Taula 2.1 es presenten les respostes impulsionals i freqüencials prenent com a entrada l'acceleració de la inèrcia governada i com a sortides el desplaçament, la velocitat i l'acceleració de la massa lliure. La seva representació gràfica correspon a la Figura 2.2.

Entrada $\ddot{y}(t)$	Resposta impulsional	Resposta freqüencial
Sortida $x(t)$	$h_{\mathrm{s}}(t) = -\dfrac{m_{\mathrm{b}}}{m_{\mathrm{a}}+m_{\mathrm{b}}}\dfrac{1}{\omega_0\cos\psi}\mathrm{e}^{-\zeta\omega_0 t}\sin(\omega_{\mathrm{d}}t)$	$\boldsymbol{H}_{\mathrm{s}}(\omega) = -\dfrac{m_{\mathrm{b}}}{m_{\mathrm{a}}+m_{\mathrm{b}}}\dfrac{1}{\left(-\omega^2+\mathrm{j}\omega 2\zeta\omega_0+\omega_0^2\right)}$
Sortida $\dot{x}(t)$	$h_{\mathrm{v}}(t) = -\dfrac{m_{\mathrm{b}}}{m_{\mathrm{a}}+m_{\mathrm{b}}}\dfrac{1}{\cos\psi}\mathrm{e}^{-\zeta\omega_0 t}\cos(\omega_{\mathrm{d}}t+\psi)$	$\boldsymbol{H}_{\mathrm{v}}(\omega) = -\dfrac{m_{\mathrm{b}}}{m_{\mathrm{a}}+m_{\mathrm{b}}}\dfrac{\mathrm{j}\omega}{\left(-\omega^2+\mathrm{j}\omega 2\zeta\omega_0+\omega_0^2\right)}$
Sortida $\ddot{x}(t)$	$h_{\mathrm{a}}(t) = \dfrac{m_{\mathrm{b}}}{m_{\mathrm{a}}+m_{\mathrm{b}}}\left(\dfrac{\omega_0}{\cos\psi}\mathrm{e}^{-\zeta\omega_0 t}\sin(\omega_{\mathrm{d}}t+2\psi)-\delta(t)\right)$	$\boldsymbol{H}_{\mathrm{a}}(\omega) = \dfrac{m_{\mathrm{b}}}{m_{\mathrm{a}}+m_{\mathrm{b}}}\dfrac{\omega^2}{\left(-\omega^2+\mathrm{j}\omega 2\zeta\omega_0+\omega_0^2\right)}$ (1)

Taula 2.1 Respostes impulsionals i freqüencials per a una entrada acceleració

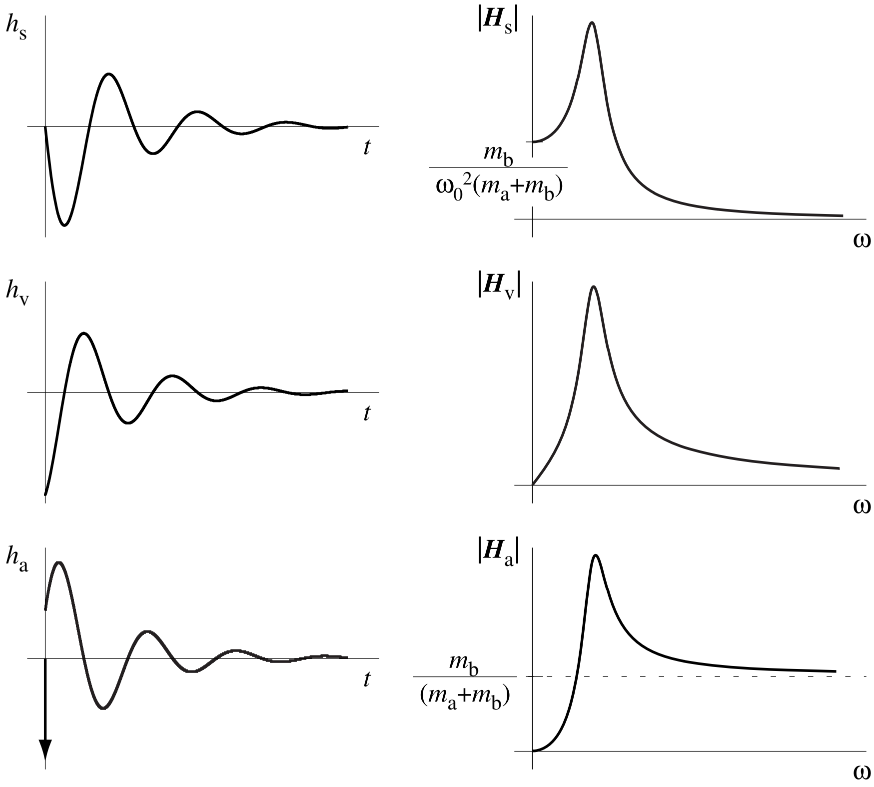

Figura 2.2 Respostes impulsionals i mòdul de les respostes freqüencials per a una entrada acceleració i sortida desplaçament (h_s i $\boldsymbol{H}_s$), velocitat (h_v i $\boldsymbol{H}_v$) i acceleració (h_a i $\boldsymbol{H}_a$)

(1) La funció de resposta freqüencial no és integrable en aquest cas. Per poder fer servir la transformada inversa de Fourier per a l'obtenció de la resposta impulsional, cal fer ús de la funció delta de Dirac.

2.4 Respostes freqüencial i impulsional prenent com a entrada la velocitat de la inèrcia governada i com a sortida el desplaçament de la massa lliure

Resposta freqüencial

Es pot obtenir directament de la resposta freqüencial (2.3)

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{s}}(\omega)=\frac{\boldsymbol{X}(\omega)}{\dot{\boldsymbol{Y}}(\omega)}=\frac{\mathrm{j}\omega\boldsymbol{X}(\omega)}{\mathrm{j}\omega\dot{\boldsymbol{Y}}(\omega)}=\mathrm{j}\omega\frac{\boldsymbol{X}(\omega)}{\ddot{\boldsymbol{Y}}(\omega)}=-\frac{m_{\mathrm{b}}}{m_{\mathrm{a}}+m_{\mathrm{b}}}\frac{\mathrm{j}\omega}{\left(-\omega^{2}+\mathrm{j}\omega2\zeta\omega_{0}+\omega_{0}^{2}\right)} \qquad (2.14)$$

Resposta impulsional

L'entrada impuls de velocitat es pot expressar segons:

$$\dot{y}(t)=I\delta(t) \qquad (2.15)$$

Durant el impuls l'acceleració $\ddot{x}(t)$ val:

$$\ddot{x}(t)=-\frac{m_{\mathrm{b}}}{m_{\mathrm{a}}+m_{\mathrm{b}}}I\dot{\delta}(t) \qquad 0^{-}<t<0^{+} \qquad (2.16)$$

$$\dot{x}(t)=-\int_{0^{-}}^{t}\frac{m_{\mathrm{b}}}{m_{\mathrm{a}}+m_{\mathrm{b}}}I\dot{\delta}(t)\mathrm{d}t+\dot{x}(0^{-})=-\frac{m_{\mathrm{b}}}{m_{\mathrm{a}}+m_{\mathrm{b}}}I\delta(t) \qquad 0^{-}<t<0^{+} \qquad (2.17)$$

Integrant s'obté l'estat en l'instant $t=0^{+}$:

$$\begin{aligned} x(0^{+})&=-\int_{0^{-}}^{0^{+}}\frac{m_{\mathrm{b}}}{m_{\mathrm{a}}+m_{\mathrm{b}}}I\delta(t)\mathrm{d}t+x(0^{-})=-\frac{m_{\mathrm{b}}}{m_{\mathrm{a}}+m_{\mathrm{b}}}I \\ `x(0^{+})&=-\int_{0^{-}}^{0^{+}}\frac{m_{\mathrm{b}}}{m_{\mathrm{a}}+m_{\mathrm{b}}}I\mathrm{d}t+`x(0^{-})=0 \end{aligned} \qquad (2.18)$$

essent $`x(t)$ la funció integral de la funció d'oscil·lació lliure $x(t)$.

Anàlogament al cas anterior, després de l'impuls, el sistema es mou lliurement ja que l'excitació aplicada desapareix. La solució de l'equació de moviment correspon a la descrita en (2.9). C_1 i φ depenen de les condicions inicials del moviment que prenen els valors indicats en (2.18). La funció integral $`x(t)$ es pot expressar segons:

$$`x(t)=\int x(t)\mathrm{d}t=-C_{1}\frac{1}{\omega_{0}}\mathrm{e}^{-\zeta\omega_{0}t}\cos(\omega_{\mathrm{d}}t+\varphi-\psi)+C_{2} \qquad (2.19)$$

Per a $t\rightarrow\infty$ es pren un valor $`x(t)\underset{t\rightarrow\infty}{=}0$, per la qual cosa, $C_2=0$. Avaluant (2.9) i (2.19) per a $t=0^{+}$ s'obté:

$$\varphi = \psi + \frac{\pi}{2}; \quad C_1 = -\frac{m_\mathrm{b}}{m_\mathrm{a} + m_\mathrm{b}} \frac{I}{\sin\varphi} = -\frac{m_\mathrm{b}}{m_\mathrm{a} + m_\mathrm{b}} \frac{I}{\cos\psi} \tag{2.20}$$

Per tant, la resposta impulsional és:

$$h_\mathrm{s}(t) = -\frac{m_\mathrm{b}}{m_\mathrm{a} + m_\mathrm{b}} \frac{1}{\cos\psi} \mathrm{e}^{-\zeta\omega_0 t} \cos(\omega_\mathrm{d} t + \psi) \tag{2.21}$$

2.5 Resum de les respostes freqüencials i impulsionals prenent com a entrada la velocitat de la inèrcia governada i com a sortida, diverses magnituds cinemàtiques de la massa lliure

En la Taula 2.2 es presenten les respostes impulsionals i freqüencials prenent com a entrada la velocitat de la inèrcia governada i com a sortides el desplaçament, la velocitat i l'acceleració de la massa lliure. La seva representació gràfica correspon a la Figura 2.3.

Cal notar que les respostes (impulsional i freqüencial) amb sortida posició i velocitat de la Taula 2.2 són equivalents a les de la Taula 2.1 amb sortida velocitat i acceleració, respectivament, ja que si es té un sistema amb una funció de resposta freqüencial $\boldsymbol{H}(\omega) = \boldsymbol{Y}(\omega)/\boldsymbol{X}(\omega)$, la resposta freqüencial de la relació de les seves derivades o integrals és la mateixa:

$$\boldsymbol{H}(\omega) = \frac{\boldsymbol{Y}(\omega)}{\boldsymbol{X}(\omega)} = \frac{\mathrm{j}\omega\boldsymbol{Y}(\omega)}{\mathrm{j}\omega\boldsymbol{X}(\omega)} = \frac{\dot{\boldsymbol{Y}}(\omega)}{\dot{\boldsymbol{X}}(\omega)} \tag{2.22}$$

Entrada $\dot{y}(t)$	Resposta impulsional	Resposta freqüencial
Sortida $x(t)$	$h_\mathrm{s}(t) = -\frac{m_\mathrm{b}}{m_\mathrm{a} + m_\mathrm{b}} \frac{1}{\cos\psi} \mathrm{e}^{-\zeta\omega_0 t} \cos(\omega_\mathrm{d} t + \psi)$	$\boldsymbol{H}_\mathrm{s}(\omega) = -\frac{m_\mathrm{b}}{m_\mathrm{a} + m_\mathrm{b}} \frac{\mathrm{j}\omega}{\left(-\omega^2 + \mathrm{j}\omega 2\zeta\omega_0 + \omega_0^2\right)}$
Sortida $\dot{x}(t)$	$h_\mathrm{v}(t) = \frac{m_\mathrm{b}}{m_\mathrm{a} + m_\mathrm{b}} \left(\frac{\omega_0}{\cos\psi} \mathrm{e}^{-\zeta\omega_0 t} \sin(\omega_\mathrm{d} t + 2\psi) - \delta(t) \right)$	$\boldsymbol{H}_\mathrm{v}(\omega) = \frac{m_\mathrm{b}}{m_\mathrm{a} + m_\mathrm{b}} \frac{\omega^2}{\left(-\omega^2 + \mathrm{j}\omega 2\zeta\omega_0 + \omega_0^2\right)}$ (1)
Sortida $\ddot{x}(t)$	$h_\mathrm{a}(t) = \frac{m_\mathrm{b}}{m_\mathrm{a} + m_\mathrm{b}} \left(\frac{\omega_0^2}{\cos\psi} \mathrm{e}^{-\zeta\omega_0 t} \cos(\omega_\mathrm{d} t + 3\psi) - \dot{\delta}(t) \right)$	$\boldsymbol{H}_\mathrm{a}(\omega) = \frac{m_\mathrm{b}}{m_\mathrm{a} + m_\mathrm{b}} \frac{\mathrm{j}\omega^3}{\left(-\omega^2 + \mathrm{j}\omega 2\zeta\omega_0 + \omega_0^2\right)}$ (2)

Taula 2.2 Respostes impulsionals i freqüencials per a una entrada velocitat

(1) (2) Les funcions de resposta freqüencial no són integrables en aquest cas. Per poder fer servir la transformada inversa de Fourier per a l'obtenció de les respostes impulsionals, cal fer ús de la funció delta de Dirac.

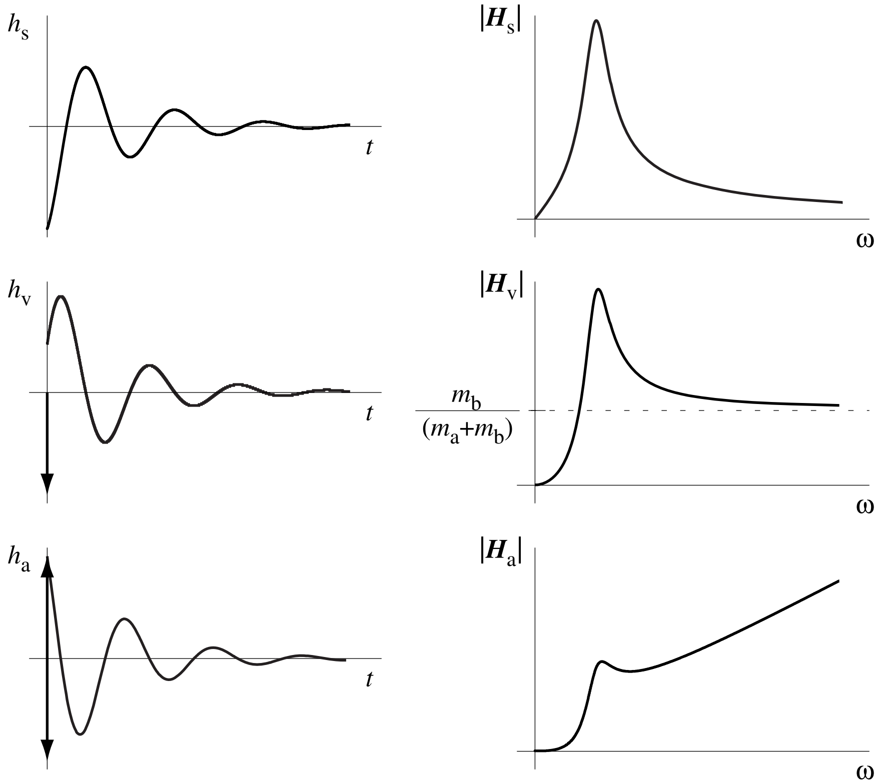

Figura 2.3 Respostes impulsionals i mòdul de les respostes freqüencials per a una entrada velocitat i sortida desplaçament (h_s i $\boldsymbol{H}_s$), velocitat (h_v i $\boldsymbol{H}_v$) i acceleració (h_a i $\boldsymbol{H}_a$)(1)

(1) Les dues fletxes representen la derivada temporal de l'impuls.

3 Sistema amb força excitadora

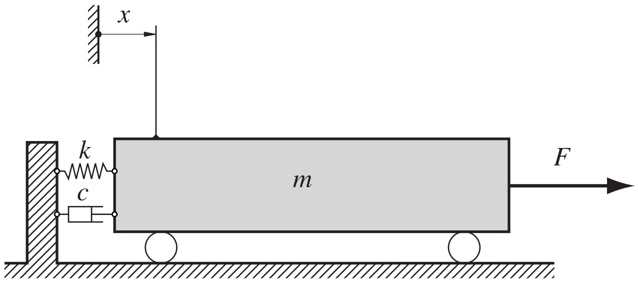

Figura 3.1 Sistema genèric de 1GL lliure amb força excitadora

3.1 Equació de moviment

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F \tag{3.1}$$

Parametritzant

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m} \tag{3.2}$$

amb $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ i $\zeta = c/2\sqrt{mk}$

3.2 Respostes freqüencial i impulsional prenent com a entrada la força excitadora i com a sortida el desplaçament de la massa

Resposta freqüencial

S'aplica la Transformada de Fourier a l'equació de moviment (3.2)

$$\begin{gathered}\left(-\omega^2 + \mathrm{j}\omega 2\zeta\omega_0 + \omega_0^2\right)\boldsymbol{X}(\omega) = \frac{1}{m}\boldsymbol{F}(\omega) \\ \boldsymbol{H}_\mathrm{s}(\omega) = \frac{\boldsymbol{X}(\omega)}{\boldsymbol{F}(\omega)} = \frac{1}{m}\frac{1}{\left(-\omega^2 + \mathrm{j}\omega 2\zeta\omega_0 + \omega_0^2\right)}\end{gathered} \tag{3.3}$$

Resposta impulsional

L'entrada impuls de força es pot expressar segons:

$$F(t) = I\delta(t) \tag{3.4}$$

Durant el impuls es té:

$$\ddot{x}(t) = \frac{1}{m} I\delta(t) \qquad 0^- < t < 0^+ \tag{3.5}$$

Integrant s'obté l'estat en l'instant t=0^+:

$$\begin{aligned} \dot{x}(0^+) &= \int_{0^-}^{0^+} \frac{1}{m} I\delta(t)\,\mathrm{d}t + \dot{x}(0^-) = \frac{I}{m} \\ x(0^+) &= \int_{0^-}^{0^+} \frac{I}{m}\mathrm{d}t + x(0^-) = 0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Després de l'impuls, el sistema es mourà lliurement ja que l'excitació aplicada desapareix. La solució de l'equació de moviment correspon a la descrita per (2.9). S'avalua (3.6) en (2.9) i (2.10) per trobar φ i C_1.

$$\varphi = 0; \quad C_1 = \frac{I}{\omega_0 m \cos\psi} \tag{3.7}$$

La resposta impulsional és:

$$h_\mathrm{s}(t) = \frac{1}{\omega_0 m \cos\psi} \mathrm{e}^{-\zeta\omega_0 t} \sin(\omega_\mathrm{d} t) \tag{3.8}$$

3.3 Resum de les respostes freqüencials i impulsionals prenent com a entrada la força excitadora i com a sortida diverses magnituds cinemàtiques de la massa

En la Taula 3.1 es presenten les respostes impulsionals i freqüencials prenent com a entrada la força excitadora i com a sortides el desplaçament, la velocitat i l'acceleració de la massa. La seva representació gràfica correspon a la Figura 3.2.

Entrada $F(t)$	Resposta impulsional	Resposta freqüencial
Sortida $x(t)$	$h_\mathrm{s}(t) = \frac{1}{\omega_0 m \cos\psi} \mathrm{e}^{-\zeta\omega_0 t} \sin(\omega_\mathrm{d} t)$	$\boldsymbol{H}_\mathrm{s}(\omega) = \frac{1}{m} \frac{1}{\left(-\omega^2 + \mathrm{j}\omega 2\zeta\omega_0 + \omega_0^2\right)}$
Sortida $\dot{x}(t)$	$h_\mathrm{v}(t) = \frac{1}{m \cos\psi} \mathrm{e}^{-\zeta\omega_0 t} \cos(\omega_\mathrm{d} t + \psi)$	$\boldsymbol{H}_\mathrm{v}(\omega) = \frac{1}{m} \frac{\mathrm{j}\omega}{\left(-\omega^2 + \mathrm{j}\omega 2\zeta\omega_0 + \omega_0^2\right)}$
Sortida $\ddot{x}(t)$	$h_\mathrm{a}(t) = -\frac{1}{m}\left(\frac{\omega_0}{\cos\psi} \mathrm{e}^{-\zeta\omega_0 t} \sin(\omega_\mathrm{d} t + 2\psi) - \delta(t)\right)$	$\boldsymbol{H}_\mathrm{a}(\omega) = -\frac{1}{m} \frac{\omega^2}{\left(-\omega^2 + \mathrm{j}\omega 2\zeta\omega_0 + \omega_0^2\right)}$ (1)

Taula 3.1 Respostes impulsionals i freqüencials per a una entrada força

(1) La funció de resposta freqüencial no és integrable en aquest cas. Per poder fer servir la transformada inversa de Fourier per a l'obtenció de la resposta impulsional, cal fer ús de la funció delta de Dirac.

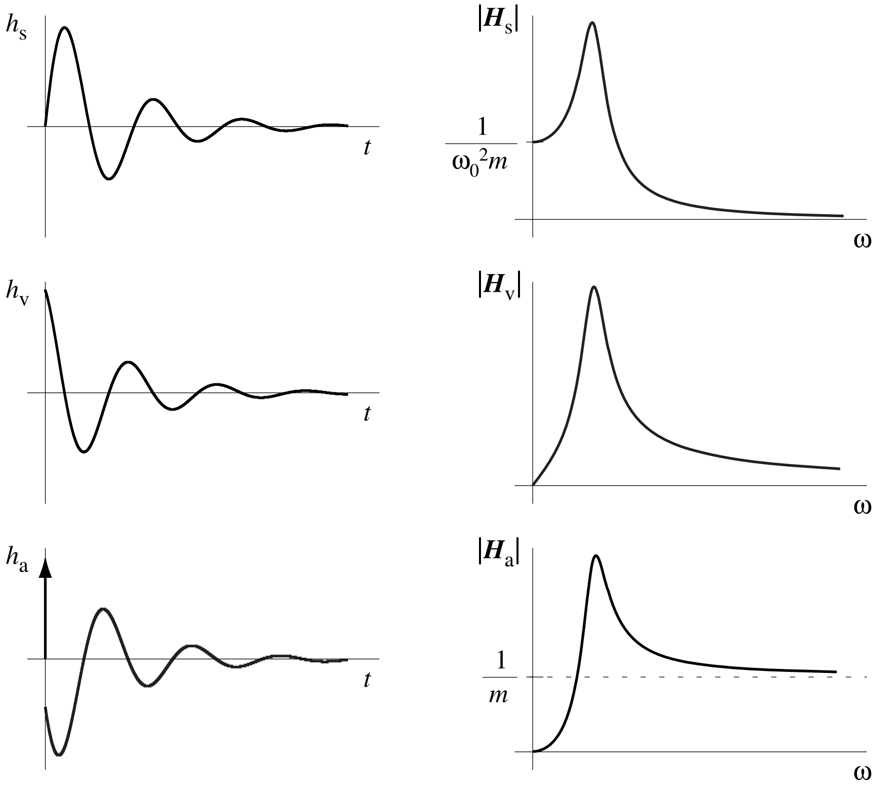

Figura 3.2 Respostes impulsionals i mòdul de les respostes freqüencials per a una entrada força i sortida desplaçament (h_s i $\boldsymbol{H}_s$), velocitat (h_v i $\boldsymbol{H}_v$) i acceleració (h_a i $\boldsymbol{H}_a$)

4 Sistema amb excitació per la base

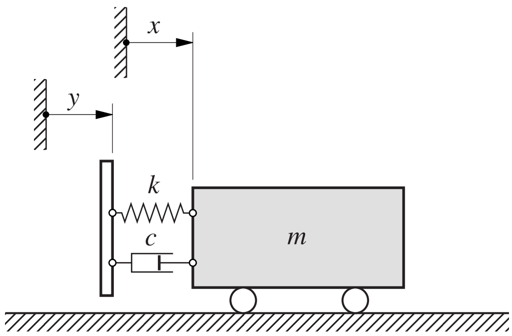

Figura 4.1 Sistema genèric de 1GL lliure amb excitació per la base

4.1 Equació de moviment

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{y} + ky \tag{4.1}$$

Parametritzant

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 2\zeta\omega_0\dot{y} + \omega_0^2 y \tag{4.2}$$

amb $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ i $\zeta = c/(2\sqrt{mk})$

4.2 Resposta freqüencial i impulsional prenent com a entrada l'acceleració de la base i com a sortida el desplaçament de la massa

Resposta freqüencial

S'aplica la Transformada de Fourier a l'equació de moviment (4.2)

$$\begin{aligned} &\left(-\omega^2 + \mathrm{j}\omega 2\zeta\omega_0 + \omega_0^2\right)\boldsymbol{X}(\omega) = \left(\frac{2\zeta\omega_0}{\mathrm{j}\omega} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\ddot{\boldsymbol{Y}}(\omega) \\ &\boldsymbol{H}_\mathrm{s}(\omega) = \frac{\boldsymbol{X}(\omega)}{\ddot{\boldsymbol{Y}}(\omega)} = \frac{-\mathrm{j}\omega 2\zeta\omega_0 - \omega_0^2}{-\omega^4 + \mathrm{j}\omega^3 2\zeta\omega_0 + \omega^2\omega_0^2} \end{aligned} \tag{4.3}$$

Resposta impulsional

L'entrada impuls d'acceleració té la forma descrita en (2.5). Es calculen les funcions velocitat i desplaçament de l'entrada ja que surten en el terme d'excitació de l'equació de moviment.

$$\dot{y}(t)=\begin{cases}0 & t\le 0^-\\ \int_{0^-}^{t} I\delta(t)\,\mathrm{d}t+\dot{y}(0^-)=I & t\ge 0^+\end{cases}$$
$$y(t)=\begin{cases}0 & t\le 0^-\\ \int_{0^-}^{t} I\,\mathrm{d}t+y(0^-)=It & t\ge 0^+\end{cases} \tag{4.4}$$

Durant l'impuls, la massa no rep cap excitació directament, ja que no hi ha cap terme que inclogui $\ddot{y}(t)$. Per tant:

$$\ddot{x}(t)=0 \qquad 0^-<t<0^+ \tag{4.5}$$

L'estat del sistema en l'instant t=0^+:

$$\begin{aligned}\dot{x}(0^+)&=\dot{x}(0^-)=0\\ x(0^+)&=x(0^-)=0\end{aligned} \tag{4.6}$$

Després del impuls, el sistema es mourà segons l'equació de moviment plantejada. Substituint en ella la funció d'excitació corresponent, s'obté una equació diferencial lineal no homogènia amb coeficients constants:

$$\ddot{x}+2\zeta\omega_0\dot{x}+\omega_0^2\,x=2\zeta\omega_0 I+\omega_0^2\,It \tag{4.7}$$

La solució de l'equació diferencial correspon a la suma d'una solució homogènia i una solució particular, $x(t)=x_\mathrm{h}(t)+x_\mathrm{p}(t)$. La solució homogènia és la descrita per (2.9), i la solució particular pren la forma:

$$x_\mathrm{p}(t)=at+b \tag{4.8}$$

Solució completa:

$$x(t)=C_1\mathrm{e}^{-\zeta\omega_0 t}\sin(\omega_\mathrm{d}t+\varphi)+at+b \tag{4.9}$$

L'expressió que descriu la velocitat és la mostrada a continuació i l'acceleració correspon directament a l'expressió (2.11).

$$\dot{x}(t)=\omega_0 C_1\mathrm{e}^{-\zeta\omega_0 t}\cos(\omega_\mathrm{d}t+\varphi+\psi)+a \tag{4.10}$$

Substituint (2.11), (4.9) i (4.10) a (4.7), i dividint per t, s'obté:

$$\begin{aligned}&\left[-\omega_0^2\frac{C_1}{t}\mathrm{e}^{-\zeta\omega_0 t}\sin(\omega_\mathrm{d}t+\varphi+2\psi)\right]+2\zeta\omega_0\left[\omega_0\frac{C_1}{t}\mathrm{e}^{-\zeta\omega_0 t}\cos(\omega_\mathrm{d}t+\varphi+\psi)+\frac{a}{t}\right]+\\ &+\omega_0^2\left[\frac{C_1}{t}\mathrm{e}^{-\zeta\omega_0 t}\sin(\omega_\mathrm{d}t+\varphi)+a+\frac{b}{t}\right]=2\zeta\omega_0\frac{I}{t}+\omega_0^2\,I\end{aligned} \tag{4.11}$$

Per a $t \to \infty$

$$\begin{aligned} \omega_0^2 a &= \omega_0^2 I \\ a &= I \end{aligned} \tag{4.12}$$

Substituint novament (2.11), (4.9), (4.10) i aquest resultat a (4.7), i simplificant s'obté:

$$\begin{aligned} &\left[-\omega_0^2 C_1 \mathrm{e}^{-\zeta\omega_0 t}\sin(\omega_\mathrm{d} t+\varphi+2\psi)\right]+2\zeta\omega_0\left[\omega_0 C_1 \mathrm{e}^{-\zeta\omega_0 t}\cos(\omega_\mathrm{d} t+\varphi+\psi)\right]+ \\ &+\omega_0^2\left[C_1 \mathrm{e}^{-\zeta\omega_0 t}\sin(\omega_\mathrm{d} t+\varphi)+b\right]=0 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Per a $t \to \infty$ resulta b=0. Un cop s'han trobat a i b, s'avaluen (4.9) i (4.10) en l'instant t=0$^+$ per trobar φ i C_1.

$$\varphi = 0; \quad C_1 = -\frac{I}{\omega_0 \cos\psi} \tag{4.14}$$

La resposta impulsional és:

$$h_\mathrm{s}(t) = -\frac{1}{\omega_0\cos\psi}\mathrm{e}^{-\zeta\omega_0 t}\sin(\omega_\mathrm{d} t)+t \tag{4.15}$$

4.3 Resum de les respostes freqüencials i impulsionals prenent com a entrada l'acceleració de la base i com a sortida diverses magnituds cinemàtiques de la massa

En la Taula 4.1 es presenten les respostes impulsionals i freqüencials prenent com a entrada l'acceleració de la base i com a sortides el desplaçament, la velocitat i l'acceleració de la massa. La seva representació gràfica correspon a la Figura 4.2.

Entrada $\ddot{y}(t)$	Resposta impulsional	Resposta freqüencial
Sortida $x(t)$	$h_\mathrm{s}(t) = -\frac{1}{\omega_0\cos\psi}\mathrm{e}^{-\zeta\omega_0 t}\sin(\omega_\mathrm{d} t)+t$	$\boldsymbol{H}_\mathrm{s}(\omega) = \frac{-\mathrm{j}\omega 2\zeta\omega_0 - \omega_0^2}{-\omega^4+\mathrm{j}\omega^3 2\zeta\omega_0+\omega^2\omega_0^2}$ (1)
Sortida $\dot{x}(t)$	$h_\mathrm{v}(t) = -\frac{1}{\cos\psi}\mathrm{e}^{-\zeta\omega_0 t}\cos(\omega_\mathrm{d} t+\psi)+1$	$\boldsymbol{H}_\mathrm{v}(\omega) = \frac{\omega 2\zeta\omega_0 - \mathrm{j}\omega_0^2}{-\omega^3+\mathrm{j}\omega^2 2\zeta\omega_0+\omega\omega_0^2}$ (2)
Sortida $\ddot{x}(t)$	$h_\mathrm{a}(t) = \frac{\omega_0}{\cos\psi}\mathrm{e}^{-\zeta\omega_0 t}\sin(\omega_\mathrm{d} t+2\psi)$	$\boldsymbol{H}_\mathrm{a}(\omega) = \frac{\mathrm{j}\omega 2\zeta\omega_0 + \omega_0^2}{-\omega^2+\mathrm{j}\omega 2\zeta\omega_0+\omega_0^2}$

Taula 4.1 Respostes impulsionals i freqüencials per a una entrada acceleració

(1) (2) Les funcions de resposta freqüencial no són integrables en aquest cas. Per tant, no es pot fer ús de la transformada inversa de Fourier per a l'obtenció de les respostes impulsionals.

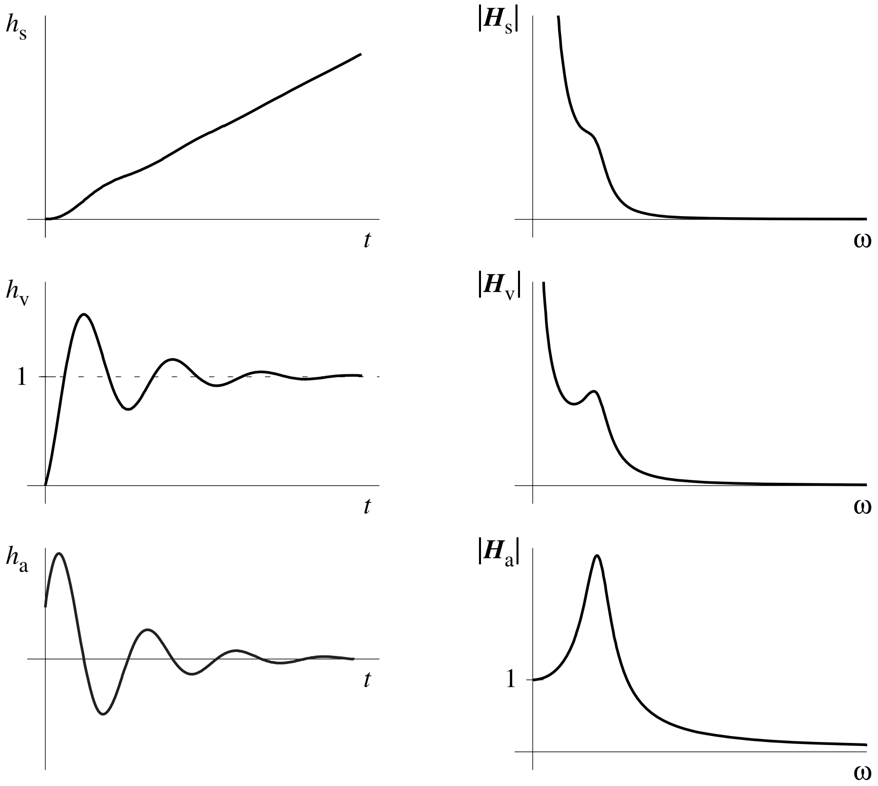

Figura 4.2 Respostes impulsionals i mòdul de les respostes freqüencials per a una entrada acceleració i sortida desplaçament (h_s i $\boldsymbol{H}_\mathrm{s}$), velocitat ($h_\mathrm{v}$ i $\boldsymbol{H}_\mathrm{v}$) i acceleració ($h_\mathrm{a}$ i $\boldsymbol{H}_\mathrm{a}$)

4.4 Resposta freqüencial i impulsional prenent com a entrada la velocitat de la base i com a sortida el desplaçament de la massa

Resposta freqüencial

S'obté directament de la resposta freqüencial (4.3)

$$\boldsymbol{H}_\mathrm{s}(\omega)=\frac{\boldsymbol{X}(\omega)}{\dot{\boldsymbol{Y}}(\omega)}=\frac{\mathrm{j}\omega\boldsymbol{X}(\omega)}{\mathrm{j}\omega\dot{\boldsymbol{Y}}(\omega)}=\mathrm{j}\omega\frac{\boldsymbol{X}(\omega)}{\ddot{\boldsymbol{Y}}(\omega)}=\frac{\omega 2\zeta\omega_0-\mathrm{j}\omega_0^2}{-\omega^3+\mathrm{j}\omega^2 2\zeta\omega_0+\omega\omega_0^2} \tag{4.16}$$

Resposta impulsional

L'entrada impuls de velocitat té la forma descrita en (2.15). Es calcula la funció desplaçament de l'entrada ja que surt en el terme d'excitació de l'equació de moviment:

$$y(t)=\begin{cases}0 & t\le 0^-\\ \int_{0^-}^{t} I\delta(t)\,\mathrm{d}t+y(0^-)=I & t\ge 0^+\end{cases} \tag{4.17}$$

Durant el impuls l'acceleració $\ddot{x}(t)$ val:

$$\ddot{x}(t) = 2\zeta\omega_0 I\delta(t) \qquad 0^{-} < t < 0^{+} \tag{4.18}$$

L'estat en l'instant t=0$^+$ és:

$$\begin{aligned} \dot{x}(0^+) &= \int_{0^-}^{0^+} 2\zeta\omega_0 I\delta(t)\,\mathrm{d}t + \dot{x}(0^-) = 2\zeta\omega_0 I \\ x(0^+) &= \int_{0^-}^{0^+} 2\zeta\omega_0 I\,\mathrm{d}t + x(0^-) = 0 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Després de l'impuls, el sistema es mou segons l'equació de moviment plantejada. Substituint amb la funció d'excitació corresponent, s'obté una equació diferencial lineal no homogènia amb coeficients constants:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 I \tag{4.20}$$

La solució de l'equació diferencial correspon a la suma de una solució homogènia i una solució particular, $x(t) = x_\mathrm{h}(t) + x_\mathrm{p}(t)$. La solució homogènia és la descrita per (2.9), i la solució particular pren la forma:

$$x_\mathrm{p}(t) = a \tag{4.21}$$

Solució completa:

$$x(t) = C_1\mathrm{e}^{-\zeta\omega_0 t}\sin(\omega_\mathrm{d}t + \varphi) + a \tag{4.22}$$

La velocitat i l'acceleració corresponen directament a les expressions (2.10) i (2.11) respectivament. Es substitueix (2.10), (2.11) i (4.22) a (4.20):

$$\begin{aligned} &\left[-\omega_0^2 C_1\mathrm{e}^{-\zeta\omega_0 t}\sin(\omega_\mathrm{d}t + \varphi + 2\psi)\right] + 2\zeta\omega_0\left[\omega_0 C_1\mathrm{e}^{-\zeta\omega_0 t}\cos(\omega_\mathrm{d}t + \varphi + \psi)\right] + \\ &+\omega_0^2\left[C_1\mathrm{e}^{-\zeta\omega_0 t}\sin(\omega_\mathrm{d}t + \varphi) + a\right] = \omega_0^2 I \end{aligned} \tag{4.23}$$

Per obtenir el valor a, s'avalua per a $t \to \infty$

$$\begin{aligned} \omega_0^2 a &= \omega_0^2 I \\ a &= I \end{aligned} \tag{4.24}$$

Per trobar φ i C_1 s'avalua (4.22) i (2.10) en l'instant t=0$^+$ i s'obté:

$$\varphi = \psi + \frac{\pi}{2}; \quad C_1 = -\frac{I}{\cos\psi} \tag{4.25}$$

La resposta impulsional és:

$$h_\mathrm{s}(t) = -\frac{1}{\cos\psi}\mathrm{e}^{-\zeta\omega_0 t}\cos(\omega_\mathrm{d}t + \psi) + 1 \tag{4.26}$$

4.5 Resum de les respostes freqüencials i impulsionals prenent com a entrada la velocitat de la base i com a sortida diverses magnituds cinemàtiques de la massa

En la Taula 4.2 es presenten les respostes impulsionals i freqüencials prenent com a entrada la velocitat de la base i com a sortides el desplaçament, la velocitat i l'acceleració de la massa. La seva representació gràfica correspon a la Figura 4.3.

Entrada $\dot{y}(t)$	Resposta impulsional	Resposta freqüencial
Sortida $x(t)$	$h_\mathrm{s}(t) = -\dfrac{1}{\cos\psi}\mathrm{e}^{-\zeta\omega_0 t}\cos(\omega_\mathrm{d} t + \psi) + 1$	$\boldsymbol{H}_\mathrm{s}(\omega) = \dfrac{\omega 2\zeta\omega_0 - \mathrm{j}\omega_0^2}{-\omega^3 + \mathrm{j}\omega^2 2\zeta\omega_0 + \omega\omega_0^2}$ (1)
Sortida $\dot{x}(t)$	$h_\mathrm{v}(t) = \dfrac{\omega_0}{\cos\psi}\mathrm{e}^{-\zeta\omega_0 t}\sin(\omega_\mathrm{d} t + 2\psi)$	$\boldsymbol{H}_\mathrm{v}(\omega) = \dfrac{\mathrm{j}\omega 2\zeta\omega_0 + \omega_0^2}{-\omega^2 + \mathrm{j}\omega 2\zeta\omega_0 + \omega_0^2}$
Sortida $\ddot{x}(t)$	$h_\mathrm{a}(t) = \dfrac{\omega_0^2}{\cos\psi}\mathrm{e}^{-\zeta\omega_0 t}\cos(\omega_\mathrm{d} t + 3\psi) + 2\zeta\omega_0\delta(t)$	$\boldsymbol{H}_\mathrm{a}(\omega) = \dfrac{-\omega^2 2\zeta\omega_0 + \mathrm{j}\omega\omega_0^2}{-\omega^2 + \mathrm{j}\omega 2\zeta\omega_0 + \omega_0^2}$ (2)

Taula 4.2 Respostes impulsionals i freqüencials per a una entrada velocitat

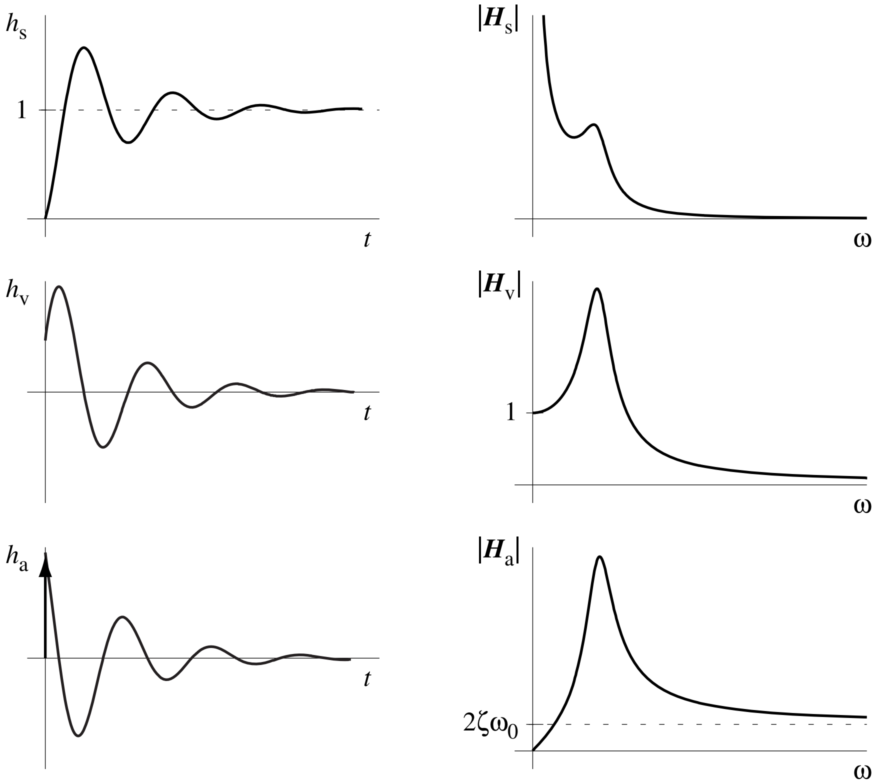

Figura 4.3 Respostes impulsionals i mòdul de les respostes freqüencials per a una entrada acceleració i sortida desplaçament (h_s i $\boldsymbol{H}_\mathrm{s}$), velocitat ($h_\mathrm{v}$ i $\boldsymbol{H}_\mathrm{v}$) i acceleració ($h_\mathrm{a}$ i $\boldsymbol{H}_\mathrm{a}$)

(1) (2) Les funcions de resposta freqüencial no són integrables en aquest cas. Només en el cas (2) per poder fer servir la transformada inversa de Fourier per a l'obtenció de la resposta impulsional, cal fer ús de la funció delta de Dirac.

5 Bibliografia

1. Braun, M. (1990), *Ecuaciones Diferenciales y sus Aplicaciones*. Mèxic: Grupo Editorial Iberoamérica cop.

2. Thomson, W.T. (1983), *Teoria de Vibraciones. Aplicaciones*. Estats Units d'Amèrica: Prentice-Hall, Inc.

3. de Silva, C. (1999), *Vibration. Fundamentals and Practice*. Estats Units d'Amèrica: CRC Press LLC.