



Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Industrial de Barcelona

Vibracions Mecàniques

Determinació de les equacions del moviment

Linealització

Salvador Cardona

Lluïsa Jordi

2010



Departament d'Enginyeria Mecànica

Vibracions Mecàniques.

Determinació del les equacions del moviment. Linealització

Primera edició Setembre 2010

© Els autors, 2010

Edita: Salvador Cardona i Foix

I.S.B.N.: 978-84-693-5795-8

Dipòsit Legal: B-38347-2010

Són rigurosament prohibides, sense l'autorització escrita dels titulars del copyright, sota les sancions establertes a la llei, la reproducció total o parcial d'aquesta obra per qualsevol procediment, inclosos la reprografia i el tractament informàtic, i la distribució d'exemplars mitjançant lloguer o préstec públics.

Índex

Introducció	5
1 Obtenció de les equacions del moviment.....	6
2 Linealització.....	7
2.1 Linealització per trams.....	8
2.2 Linealització de paràmetres.....	10
2.3 Linealització de termes de l'equació del moviment.....	13
2.4 Linealització global de l'equació del moviment	14
3 Sistemes vibratoris.....	18
3.1 Sistemes autònoms o lliures.....	18
3.2 Sistemes no autònoms	18
3.3 Sistemes d' n graus de llibertat	21
4 Teorema de l'energia.....	23
4.1 Energia cinètica. Inèrcia reduïda.....	24
4.2 Treball. Potència. Força reduïda	25
4.3 Equació del moviment.....	27
4.4 Forces conservatives. Energia potencial. Potència.....	27
4.5 Sistemes conservatius. Energia mecànica	31
4.6 Equació del moviment de sistemes conservatius. Posició d'equilibri. Linealització.....	33
5 Mètode de l'energia.....	41
6 Mètode de Rayleigh (John W. Strutt, Lord Rayleigh). Paràmetres distribuïts	43
6.1 Energia potencial interna. Exemples	44
6.2 Efecte de la massa d'una molla	49
7 Sistemes autònoms no conservatius. Posicions d'equilibri. Linealització.....	50
7.1 Exemple: Sistema autònom no conservatiu 1	53
7.2 Exemple: Sistema autònom no conservatiu 2	55
8 Sistemes no autònoms.....	59



8.1	Excitació per força.....	59
8.2	Excitació sísmica o per la base	60
8.3	Excitació sísmica d'un pèndol.....	63
8.4	Sistemes lineals de paràmetres variables.....	66
8.5	Excitació sísmica en una referència giratòria	67
8.6	Excitació per forces d'inèrcia.....	69
8.7	Excitació per forces d'inèrcia de rotors. Desequilibri estàtic.....	70
8.8	Excitació per forces d'inèrcia de rotors. Desequilibri dinàmic.....	71
8.9	Excitació per forces d'inèrcia. Visió global	73
9	Equacions de Lagrange.....	74
9.1	Equacions de Lagrange ordinàries	75
9.2	Sobre l'holonomia	77
9.3	Sistema conservatiu.....	79
9.4	Sistema no conservatiu autònom	81
9.5	Configuracions d'equilibri de sistemes autònoms.....	83
9.6	Sistema no autònom. Graus de llibertat forçats. Determinació de forces i parells dels actuadors	83
9.7	Determinació de forces i moments d'enllaç.....	86
9.8	Linealització. Matriu d'inèrcia i de rigidesa.....	88
10	Equacions de Lagrange amb multiplicadors	98
10.1	Exemple	100
11	Bibliografia.....	102



Introducció

Per a estudiar un sistema mecànic cal, en primer lloc, definir-lo correctament i, a continuació, establir-ne un model que permeti la descripció quantificada del seu comportament físic i que, per tant, ha de tenir en compte la representació –matemàtica– de les diverses realitats físiques que hi intervenen –possibilitats de moviment, massa, flexibilitat, dissipació d’energia... El comportament dinàmic del sistema queda aleshores descrit per les solucions d’una o més equacions diferencials –equacions del moviment.

Les equacions diferencials resultants poden ser o no lineals amb les variables que descriuen el moviment del sistema –coordenades generalitzades– i les seves primeres i segones derivades. Si són lineals es diu que el sistema inicial és de comportament lineal, en cas contrari és de comportament no lineal. Les equacions diferencials lineals, en particular les de coeficients constants, tenen solució analítica, i és prou senzilla, de manera que permeten establir un cos de doctrina analític i general sobre el comportament dels sistemes de comportament lineal, cosa que òbviament en facilita l’estudi.

La configuració geomètrica i les possibilitats de moviment d’un bon nombre de sistemes mecànics es poden descriure amb un nombre finit i sovint relativament baix de coordenades generalitzades i de graus de llibertat. Aquest és el cas per exemple d’un pèndol de rellotge, el de molts mecanismes com ara el pistó-biela-manovella d’un compressor alternatiu i el de vehicles com ara una motocicleta. Aquests sistemes, en general, es poden modelitzar amb partícules materials, sòlids rígids i membres deformables sense massa. La configuració dels sistemes que inclouen membres amb inèrcia no negligible i deformables –sòlids no rígids i fluids– cal descriure-la punt a punt; això fa que, en principi, siguin necessàries infinites coordenades i per tant tinguin infinites possibilitats de moviment –graus de llibertat. Aquest és el cas per exemple d’una biga, d’un carril de la via del tren o de la columna d’aire de l’interior del tub d’un instrument musical. Considerar que un sòlid és rígid o que un fluid és incompressible és una qüestió que cal analitzar detalladament en el moment d’establir el model del sistema que es vol estudiar, per tal d’arribar a una situació de compromís entre la dificultat de plantejar i resoldre el model, o la possibilitat de fer-ho en un temps raonable amb els recursos disponibles, la informació disponible del comportament dels elements constituïts del sistema, les dades de partida i la seva precisió i els resultats requerits i la precisió necessària d’aquests.



Els sistemes que es poden modelitzar i estudiar correctament amb un nombre finit de coordenades generalitzades i de graus de llibertat s'anomenen usualment d' n graus de llibertat i també alguna vegada sistemes discrets o sistemes de paràmetres concentrats (*lumped parameters* en la bibliografia en anglès). El seu estudi dinàmic requereix el plantejament i la resolució d'equacions diferencials ordinàries. Els sistemes que requereixen una descripció de la configuració punt a punt s'anomenen sistemes continus. En aquest cas, l'estudi de la dinàmica porta a la utilització d'equacions diferencials en derivades parcials. La configuració d'aquests sistemes si són de geometria simple, per exemple una barra cilíndrica uniforme, es pot definir utilitzant funcions analítiques contínues simples i se'n poden obtenir solucions analítiques. Ara bé, és evident que la configuració de la major part de sistemes continus no pot ser descrita d'aquesta manera; només cal pensar, per exemple, en com descriure analíticament la carrosseria d'un cotxe. Aleshores, s'utilitza un nombre suficientment elevat de punts per descriure la configuració del sistema amb prou precisió i el seu estudi es converteix en l'estudi d'un sistema d'un nombre elevat de graus de llibertat, que pot ser resolt amb la capacitat de càlcul disponible. Aquest procediment s'anomena mètode dels elements finits (MEF o FEM en la bibliografia en anglès).

En aquesta monografia s'estudien sistemes d'un i d' n graus de llibertat. Com és habitual en els textos de vibracions els sistemes d' n graus de llibertat es consideren holònoms, és a dir que el nombre de coordenades generalitzades coincideix amb el nombre de graus de llibertat. Els casos en què la situació no és aquesta, en les aplicacions pràctiques es pot donar quan apareix rodolament sense lliscament i moviment a l'espai, són tractats de manera particular.

1 Obtenció de les equacions del moviment

Les equacions del moviment es poden obtenir, en principi, pels diversos procediments usualment utilitzats:

- Teoremes vectorials, adequats per a sistemes d'un i d' n graus de llibertat. Per poc complicat que sigui el sistema fàcilment porten a un desenvolupament carregós.
- Mètode de les potències virtuals amb moviment virtuals compatibles amb els enllaços, adequat per a sistemes d'un i d' n graus de llibertat. La simplicitat del mètode quan s'aplica a situacions estàtiques o quasiestàtiques desapareix, almenys en part, quan s'aplica a situacions dinàmiques a causa de la complexitat que pot representar la determinació de les forces d'inèrcia de D'Alembert.



- Teorema de l'energia o principi de conservació de l'energia, adequat i àmpliament utilitzat per a sistemes d'un grau de llibertat. A mesura que el sistema d'estudi es complica, establir les relacions vectorials requerides pels teoremes vectorials es fa més difícil i el tractament escalar basat en l'energia cinètica, l'energia potencial i el treball o la potència presenta avantatges considerables. A més, les forces i els moments dels enllaços sense frec es poden ignorar en aquesta formulació.
- Equacions de Lagrange utilitzades per a qualsevol sistema però usualment reservades als sistemes d' n graus de llibertat. Igual que el teorema de l'energia es basen en l'energia cinètica, l'energia potencial i el treball o la potència.

2 Linealització

Els avantatges que presenta la utilització d'un model de comportament lineal fan que, molt sovint en l'estudi de vibracions, si el model directament obtingut no és de comportament lineal es passi a buscar un model de comportament lineal que l'aproximi. Aquest procés s'anomena linealització del model o de les equacions que descriuen el seu comportament. És usual justificar la bondat de la linealització adduint que les vibracions solen ser de petita amplitud comparada amb el marge de moviment possible. Quan els marges de moviment són grans a vegades es procedeix a la linealització per trams, és a dir a descompondre el marge de moviment en un conjunt de trams en cadascun dels quals es pot admetre un comportament lineal.

La no linealitat prové de tres fets no excloents. El primer és el caràcter no lineal del comportament dels elements constitutius del sistema; aquest és el cas, per exemple, d'un element elàstic –molla, ballesta...– que fa entre els seus extrems una força de repulsió no proporcional a la seva deformació, o el d'un topall que limita el marge de funcionament o fa intervenir nous elements, com per exemple molles més rígides. El segon fet és la geometria del sistema, les relacions entre distàncies i angles en general no són lineals; aquest és el cas, per exemple, d'un pèndol on l'alçada del seu centre d'inèrcia és una funció trigonomètrica de l'angle que gira. El tercer fet és l'aparició de termes quadràtics en la velocitat en les equacions de la dinàmica; apareixen, per exemple, en el terme de l'acceleració de Coriolis quan es planteja una composició de moviments.

És usual abordar per separat, almenys conceptualment, la linealització del comportament dels elements –linealització de paràmetres– i de les equacions del moviment. D'aquesta manera es té:



- Linealització per trams. Es tracta de descriure el comportament global del sistema, o d'un dels seus elements, amb un cert nombre de conjunts d'equacions lineals de manera que cada conjunt és vàlid per a un tram del marge total de moviment i les condicions finals d'un tram són les inicials del següent.
- Linealització de paràmetres. Típicament es parla de la linealització del comportament dels elements elàstics –molles– i dels elements dissipadors d'energia –amortidors.
- Linealització de les equacions a posteriori. Es tracta de trobar les equacions del moviment per qualsevol dels procediments descrits i, posteriorment, linealitzar-les aplicant el desenvolupament en sèrie de Maclaurin o de Taylor.
- Linealització de les equacions a priori. Tant el teorema de l'energia com les equacions de Lagrange permeten fer un desenvolupament amb el què s'obté un procediment que proporciona directament les equacions del moviment linealitzades.

2.1 Linealització per trams

A la figura 1 es mostra un sistema en el qual el bloc de massa m està permanentment unit als dos conjunts molla-amortidor. Per limitar oscil·lacions de gran amplitud disposa de dos topalls elàstics representats per les molles de constant k_2 .

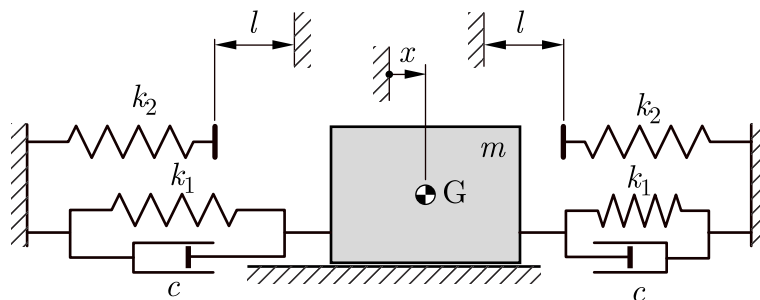


Fig.1 Sistema oscil·latori amb topalls.

L'equació del moviment del bloc es pot determinar aplicant-li el teorema de la quantitat de moviment. Ara bé, cal tenir en compte que el sistema de forces exteriors depèn de la posició x i que, per tant, es tenen tantes expressions diferents, tres en aquest cas, com estats de forces exteriors diferents hi ha. Si les molles i els amortidors són de comportament lineal es tenen tres trams del moviment del bloc, cadascun descrit per una equació diferencial lineal:



Entre topalls, $-l \leq x \leq l$

$$m \ddot{x} + 2c \dot{x} + 2k_1 x = 0$$

Contacte amb topall dret, $x > l$

$$m \ddot{x} + 2c \dot{x} + 2k_1 x + k_2(x - l) = 0$$

Contacte amb topall esquerre, $x < -l$

$$m \ddot{x} + 2c \dot{x} + 2k_1 x + k_2(x + l) = 0$$

Per a la determinació del moviment del bloc per integració de les equacions anteriors cal procedir de la següent manera: les condicions inicials fixen en quin tram s'inicia el moviment i per tant quina és l'equació que inicialment descriu el seu comportament; a partir d'aquí, el sistema evoluciona i si arriba a un canvi de tram l'equació corresponent al nou tram pren el relleu de l'anterior i les condicions de posició i de velocitat amb les quals s'abandona el tram passat són les condicions inicials del nou tram; durant el moviment, es poden anar produint canvis de tram per als quals se segueix el mateix procediment.

A la figura 2 es pot veure el gràfic del desplaçament i de l'acceleració del sistema de la figura 1 amb: $m = 1$ kg, $k_1 = 200$ N/m, $k_2 = 200$ N/m, $c = 0,25$ N/(m/s), $l = 50$ mm, quan les condicions inicials són: $x_0 = 100$ mm i $v_0 = 0$ m/s. S'observa una clara diferència entre els primers 2,5 s, durant els quals se sobrepassa l'amplitud de 50 mm i per tant el sistema passa pels tres trams i el comportament global del sistema és no lineal, i els 2,5 s restants en els quals el sistema recorre sempre el tram central i el seu comportament és per tant lineal.

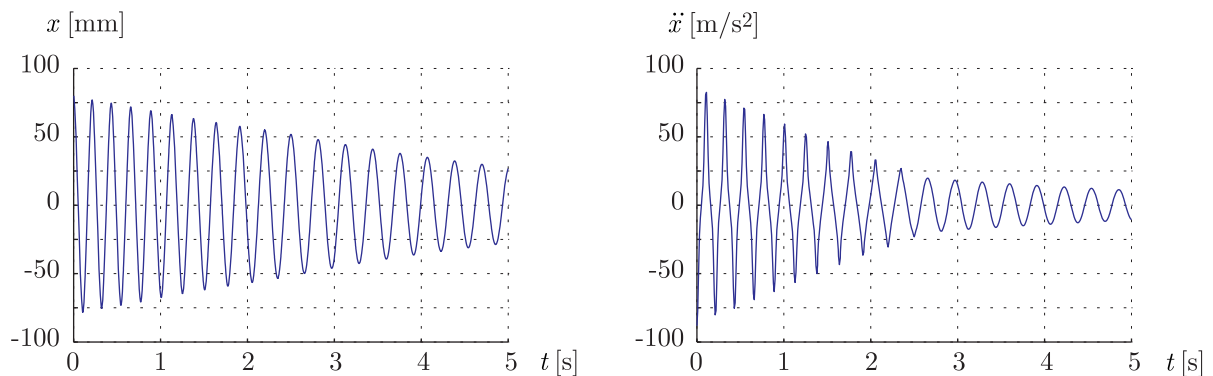


Fig.2 Desplaçament i acceleració del sistema de la figura 1.



2.2 Linealització de paràmetres

La linealització dels paràmetres d'un sistema s'aborda típicament de dues maneres: linealització per trams i linealització al voltant d'un punt de funcionament.

Linealització de paràmetres per trams

La linealització per trams s'aplica, per exemple, per a una descripció simplificada del comportament dels amortidors d'una suspensió i sol fer-se per inspecció directa. A la figura 3 es mostra la corba característica força-velocitat d'un amortidor per a la suspensió d'un vehicle i una possible aproximació en quatre trams, dos en la zona de compressió –força de repulsió entre els seus extrems– i dos en la zona d'extensió –força d'atracció entre els seus extrems.

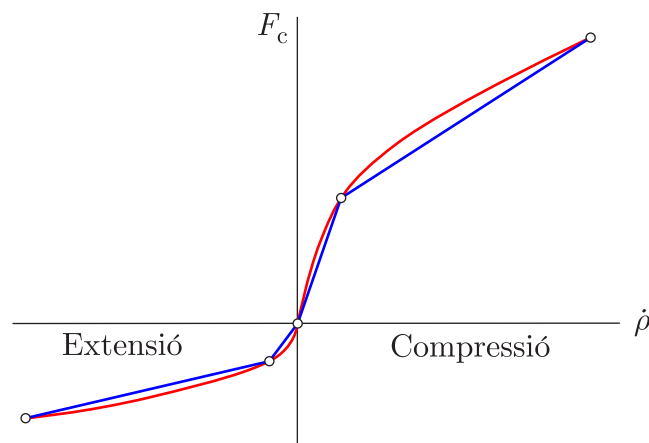


Fig. 3 Corba característica d'un amortidor per a la suspensió d'un vehicle. En vermell l'original i en blau l'aproximació per trams.

Linealització de paràmetres al voltant del punt de funcionament

La linealització al voltant d'un punt de funcionament s'utilitza, en general, quan de tot el possible marge de treball d'un element només se n'utilitza o és d'interès un tram relativament reduït. Aquest és el cas, per exemple, dels elements elàstics d'una suspensió d'un vehicle quan s'estudia el seu comportament de cara al confort dels passatgers en una carretera de rugositat raonable; probablement, caldria replantejar la possibilitat de linealització per al mateix estudi en un recorregut per pista, fora d'una carretera amb ferm.

A la figura 4 es mostra l'esquema del model més simple que es pot plantejar per a l'estudi d'una suspensió. El model és d'un grau de llibertat associat a la translació



vertical x de la massa suspesa m del vehicle –carrosseria, motor, etc. La suspensió es modelitza mitjançant un element elàstic entre la massa suspesa i el terra, que de fet inclou el comportament de la suspensió pròpiament dita i dels pneumàtics. La suspensió fa la força de repulsió entre els seus extrems que es mostra a la figura. Es pren $x = 0$ quan la roda toca just a terra i la suspensió fa força nul·la de manera que x és la compressió de l'element elàstic de la suspensió.

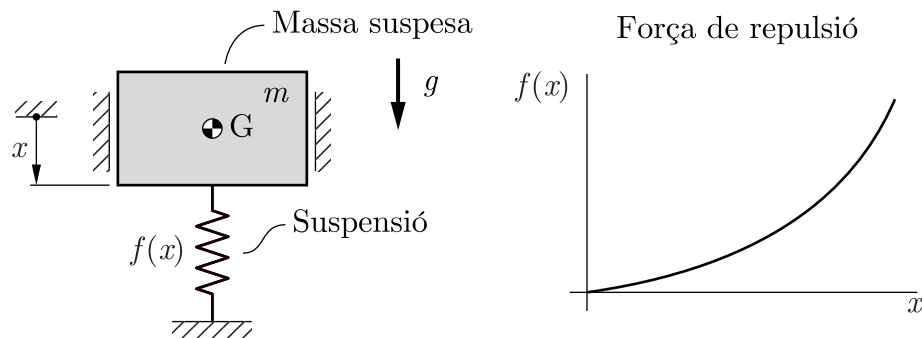


Fig. 4 Esquema d'un grau de llibertat per a l'estudi de la suspensió i la seva força de repulsió.

Per a trobar l'equació del moviment només cal considerar el diagrama de cos lliure de la massa suspesa, figura 5, i plantejar el teorema de la quantitat de moviment en direcció vertical, amb la qual cosa s'obté:

$$m \ddot{x} = m g - f(x) \quad [1]$$

L'equació 1 és no lineal, en x , a causa de la relació no lineal entre el desplaçament x i la força de repulsió $f(x)$.

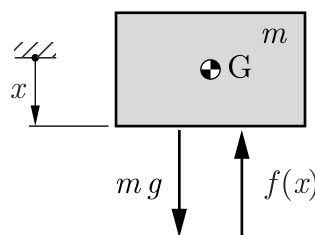


Fig. 5 Diagrama de cos lliure de la massa suspesa.

L'expressió 1 permet determinar quant es comprimeix la suspensió en repòs o, el que és el mateix, determinar la posició d'equilibri, posició en la qual l'acceleració és nul·la si la velocitat és nul·la (així si el sistema es deixa en repòs en aquesta posició, $\dot{x} = 0$, s'hi queda ja que $\ddot{x} = 0$). Per tal que es compleixi aquesta condició la força de repul-

sió de la suspensió $f(x)$ ha d'igualar al pes $m g$. A la figura 6, es mostra l'obtenció gràfica d'aquesta posició x_{eq} .

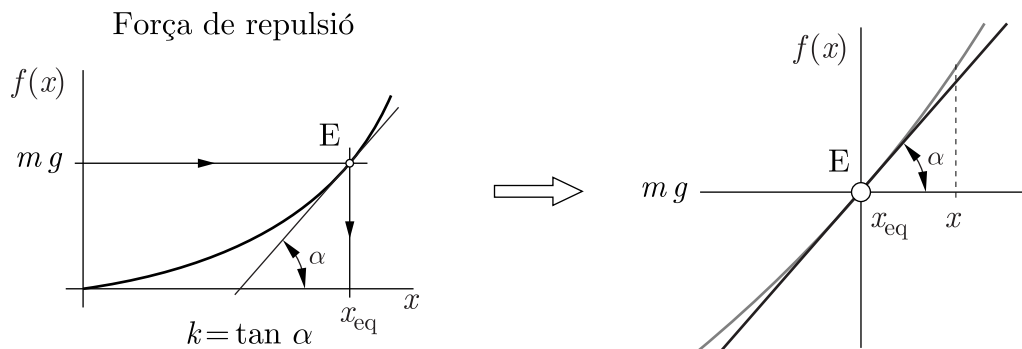


Fig. 6 Posició d'equilibri i linealització de la força de repulsió al seu entorn.

És lògic considerar que en el moviment del vehicle en carreteres de perfil no excessivament agressiu la suspensió treballa a l'entorn d' x_{eq} i per aquesta raó se substitueix, a l'entorn del punt E de la figura 6 tal com es mostra, la corba $f(x)$ per la seva tangent. De fet, se substitueix la corba pels dos primers termes del seu desenvolupament en sèrie de Taylor. En resum, per a estudiar el comportament de la suspensió en les condicions citades, la força $f(x)$ es pot escriure:

$$f(x) = m g + k(x - x_{\text{eq}}) + O(x^2) \quad \text{o} \quad f(x) \approx m g + k(x - x_{\text{eq}})$$

Amb la qual cosa l'equació del moviment [1] queda:

$$m \ddot{x} = m g - (m g + k(x - x_{\text{eq}})) = -k(x - x_{\text{eq}}) \quad [2]$$

Aquesta equació diferencial és ja lineal. En l'estudi de vibracions és usual prendre l'origen de les coordenades a la posició d'equilibri de manera que si es pren $\varepsilon = x - x_{\text{eq}}$ i s'escriu l'equació en forma canònica es té:

$$m \ddot{\varepsilon} + k \varepsilon = 0 \quad [3]$$

Si bé és evident, cal remarcar que l'equació 3 només és vàlida per a petits moviments al voltant de la posició d'equilibri; en passar de l'equació 1 a la 3 s'ha guanyat en simplicitat però s'ha perdut en generalitat, no es poden estudiar moviments de gran amplitud ni es poden trobar les possibles posicions d'equilibri.



2.3 Linealització de termes de l'equació del moviment

En algunes ocasions, en determinar les equacions del moviment apareix només un sumand, o uns pocs, prou senzill que la fan no lineal. En aquests casos, la linealització es pot fer simplement linealitzant cadascun dels sumands per separat. L'exemple típic és el pèndol de la figura 7.

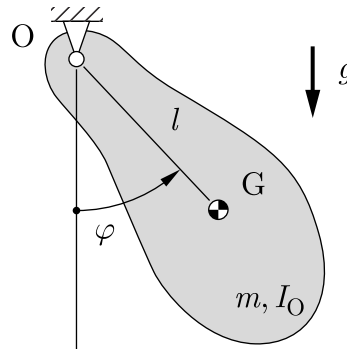


Fig. 7 Pèndol amb moviment en el pla vertical.

Els paràmetres inercials que caracteritzen el pèndol són: la massa m , el moment d'inèrcia I_O respecte a l'eix de l'articulació O i la posició del centre d'inèrcia G definida per la seva distància l a O . Per a descriure la configuració i el moviment, s'utilitza la coordenada φ , angle entre la vertical i OG . L'equació del moviment del pèndol es determina, per exemple, aplicant el teorema del moment cinètic en el punt O , centre de l'articulació, i en la direcció perpendicular al pla del moviment, que coincideix amb la de l'eix de l'articulació. L'equació que s'obté és:

$$I_O \ddot{\varphi} + m g l \sin(\varphi) = 0 \quad [4]$$

El terme $m g l \sin(\varphi)$ és no lineal en φ ja que φ és l'argument de la funció sinus. La determinació de la posició d'equilibri és trivial; fent $\ddot{\varphi} = 0$ a l'equació 4 es té:

$$\varphi_{\text{eq}} = n \pi \text{ amb } n \in \mathbb{Z}$$

La posició d'equilibri $\varphi = 0$ és estable i s'estudia el moviment oscil·latori del pèndol al seu voltant. Per a obtenir una equació lineal vàlida a l'entorn d'aquesta posició cal linealitzar el terme $m g l \sin(\varphi)$, el terme que conté l'acceleració ja ho és, i per fer-ho s'utilitza la descomposició en sèrie de Taylor.

La sèrie de Taylor és la representació d'una funció com una suma infinita de termes calculats a partir del valor de les seves derivades en un sol punt. La sèrie de Taylor de la funció $f(x)$ infinitament diferenciable a l'entorn d' $x = x_0$ és la sèrie de potències:

$$f(x) = f(x_0) + \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} (x - x_0) + \dots + \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right|_{x=x_0} (x - x_0)^n + \dots$$

De manera que si es vol una aproximació lineal d' $f(x)$ cal tenir en compte que:

$$f(x) = f(x_0) + \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} (x - x_0) + O(x^2)$$

Per tant:

$$f(x) \approx f(x_0) + \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} (x - x_0)$$

Si $x_0 = 0$ aleshores la sèrie s'anomena de Maclaurin.

El desenvolupament en sèrie de Taylor de $\sin(\varphi)$ a l'entorn de $\varphi = 0$ (sèrie de Maclaurin) és:

$$\sin(\varphi) = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} + O(\varphi^7)$$

Substituint el terme lineal d'aquesta sèrie a l'equació 4 s'obté l'equació del moviment del pèndol linealitzada.

$$I_O \ddot{\varphi} + mgl\varphi = 0 \tag{5}$$

2.4 Linealització global de l'equació del moviment

Sovint, cal plantejar la linealització de l'equació de moviment de manera global, no només d'algun terme individual com s'ha vist en l'apartat anterior. Per a fer-ho, l'equació del moviment $f(q, \dot{q}, \ddot{q}) = 0$ es considera que és una funció $f(q, \dot{q}, \ddot{q})$ de tres variables $-q, \dot{q}$ i \ddot{q} - que descriu el moviment del sistema quan val 0. Així doncs, la



linealització de l'equació del moviment és la linealització d' $f(q, \dot{q}, \ddot{q})$ per a les tres variables $-q$, \dot{q} i \ddot{q} i la posterior igualació a 0 de la suma de termes lineals.

La linealització d'una funció de més d'una variable també es fa a partir de la seva sèrie de Taylor:

$$f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0 \\ z=z_0}} (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0 \\ z=z_0}} (y - y_0) + \\ \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0 \\ z=z_0}} (z - z_0) + O^2$$

El moviment oscil·latori s'estudia al voltant d'una posició d'equilibri estable i per a velocitats i acceleracions que oscil·len a l'entorn del 0, ja que si no el sistema aniria marxant de l'entorn d'aquesta posició. Així doncs, la linealització es realitza al voltant d' $\mathbf{x}_0 = (q_{\text{eq}}, 0, 0)$ i si es pren la coordenada $\varepsilon = q - q_{\text{eq}}$ ($\dot{\varepsilon} = \dot{q}$, $\ddot{\varepsilon} = \ddot{q}$) s'obté:

$$f(\ddot{q}, \dot{q}, q) = f(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial f}{\partial \ddot{q}} \Big|_{\mathbf{x}_0} \ddot{\varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}} \Big|_{\mathbf{x}_0} \dot{\varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial q} \Big|_{\mathbf{x}_0} \varepsilon + O^2$$

El sistema pot estar en la posició d'equilibri amb velocitat i acceleració nul·les per tant $f(\mathbf{x}_0) = 0$ i l'equació del moviment linealitzada queda:

$$\frac{\partial f}{\partial \ddot{q}} \Big|_{\mathbf{x}_0} \ddot{\varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}} \Big|_{\mathbf{x}_0} \dot{\varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial q} \Big|_{\mathbf{x}_0} \varepsilon = 0 \quad [6]$$

En l'exemple del pèndol de l'apartat anterior es té:

$$f(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}) = I_O \ddot{\varphi} + m g l \sin(\varphi); \quad \varphi_0 = (0, 0, 0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \ddot{\varphi}} \Big|_{\varphi_0} = I_O; \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{\varphi}} \Big|_{\varphi_0} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi_0} = m g l$$

Resultats que substituïts a l'expressió 6 reproduïxen l'equació de moviment del pèndol linealitzada, equació 5.



Com a segon exemple per a aplicar la linealització de l'equació del moviment, a la figura 8 es mostra un sistema format per una excèntrica que manté contacte amb un bloc que es pot moure verticalment i una molla. El moment d'inèrcia de l'excèntrica respecte a l'eix de l'articulació O és I_O , la seva massa és m_e , el seu radi és R i l'excentricitat és e ; la massa del bloc és m_b ; la molla és lineal de constant k i fa una força d'atracció entre els seus extrems T_0 quan $\varphi = 0$. L'equació del moviment es pot determinar, per exemple, fent ús del teorema de l'energia en versió diferencial i tenint en compte que totes les forces que fan treball no nul, els pesos i la molla, deriven de potencial.

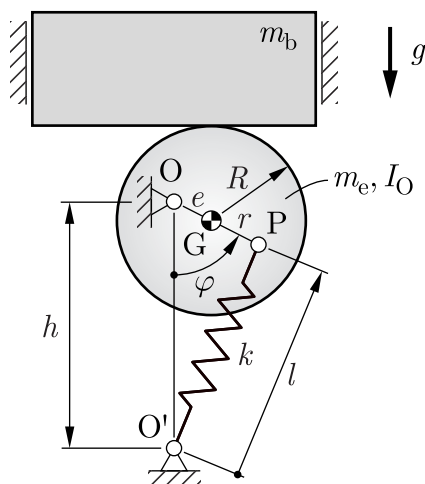


Fig. 8 Excèntrica amb un bloc i una molla.

Per a descriure el moviment s'utilitza la coordenada generalitzada φ i per simplificar l'escriptura s'utilitza la variable auxiliar l , longitud de la molla. L'energia cinètica i l'energia potencial (definida a partir de la configuració $\varphi = 0$) són:

$$\begin{aligned}
 E_c &= \frac{1}{2} I_O \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_b (e \sin(\varphi))^2 \dot{\varphi}^2 \\
 E_p &= E_{p \text{ pes}} + E_{p \text{ molla}} = (m_e + m_b) g e (1 - \cos(\varphi)) + \\
 &\quad \frac{1}{2} k (l - (h - r))^2 + T_0 (l - (h - r)) \quad \text{amb} \\
 l &= (r^2 + h^2 - 2 r h \cos(\varphi))^{1/2}
 \end{aligned} \tag{7}$$

Substituint les expressions anteriors a la versió diferencial del teorema de l'energia, que es descriu detalladament més endavant, s'obté l'equació del moviment:



$$\begin{aligned} \dot{E}_c = P = - \left(\frac{dE_p}{d\varphi} \right) \dot{\varphi} \\ (I_O + m_b e^2 \sin^2(\varphi)) \ddot{\varphi} + m_b e^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) \dot{\varphi}^2 + \\ (m_b + m_e) g e \sin(\varphi) + (k(l - (h - r)) + T_0) \frac{r h \sin(\varphi)}{l} = 0 \end{aligned} \quad [8]$$

Fent $\ddot{\varphi} = 0$ i $\dot{\varphi} = 0$ a l'equació 8 es té:

$$\varphi_{\text{eq}} = n \pi \text{ amb } n \in \mathbb{Z}$$

L'equació anterior linealitzada al voltant de configuració d'equilibri $\varphi_{\text{eq}} = 0$, i fent ús de l'expressió 6 amb $\varphi_0 = (0, 0, 0)$, condueix a:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial \ddot{\varphi}} \right|_{\varphi_0} = I_O ; \quad \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{\varphi}} \right|_{\varphi_0} = 0 ; \quad \left. \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right|_{\varphi_0} = (m_b + m_e) g e + \frac{r h}{(h - r)} T_0 \\ I_O \ddot{\varphi} + \left((m_b + m_e) g e + \frac{r h}{(h - r)} T_0 \right) \varphi = 0 \end{aligned} \quad [9]$$

Linealitat de l'equació del moviment en l'acceleració

Si s'observen les equacions del moviment, expressions 4 i 8, dels exemples analitzats es posa de manifest la seva linealitat pel que fa a l'acceleració; en els dos casos l'acceleració $\ddot{\varphi}$ apareix únicament multiplicada per un coeficient, constant o funció només de φ . Aquest fet no és una situació particular, sempre és així ja que la formulació de la Mecànica és lineal pel que fa a l'acceleració $-F = m a$. A partir de la formulació de l'equació del moviment per mitjà del teorema de l'energia en versió diferencial, es demostra, tal com es veurà, que el coeficient de l'acceleració és la inèrcia reduïda, que només és funció de la configuració, associada a la coordenada generalitzada, φ en els exemples. En l'equació linealitzada, el coeficient de l'acceleració és la inèrcia reduïda particularitzada a la configuració d'equilibri. En resum, en l'equació del moviment, si convé, es pot aïllar fàcilment l'acceleració i escriure $\ddot{q} = g(q, \dot{q})$.



3 Sistemes vibratoris

3.1 Sistemes autònoms o lliures

A l'equació del moviment dels exemples mostrats fins ara, no intervé el temps de manera explícita, $f(q, \dot{q}, \ddot{q}) = 0$. Això fa que l'evolució temporal del moviment del sistema, solució d'aquesta equació, només depengui d'ell i de les condicions amb què s'inicia el moviment, condicions inicials. Aquests sistemes s'anomenen autònoms, i al seu moviment, moviment lliure. La independència de l'exterior de l'evolució temporal del sistema estudiat es posa de manifest per dos fets: la coordenada q i la seva derivada \dot{q} descriuen únicament l'estat del sistema, no d'elements externs; la forma concreta d' $f(q, \dot{q}, \ddot{q})$ reflecteix, també únicament, les característiques del sistema –inèrcies, resistències passives... – que queden quantificades pels paràmetres que les defineixen.

3.2 Sistemes no autònoms

Els sistemes no autònoms són aquells sistemes tals que el seu comportament no depèn exclusivament d'ells mateixos, sinó que es veu influït per l'entorn amb el qual interaccionen. L'equació del moviment dels sistemes no autònoms depèn explícitament del temps $f(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) = 0$. Amb la variable temps s'inclou en l'equació del moviment l'efecte de l'entorn.

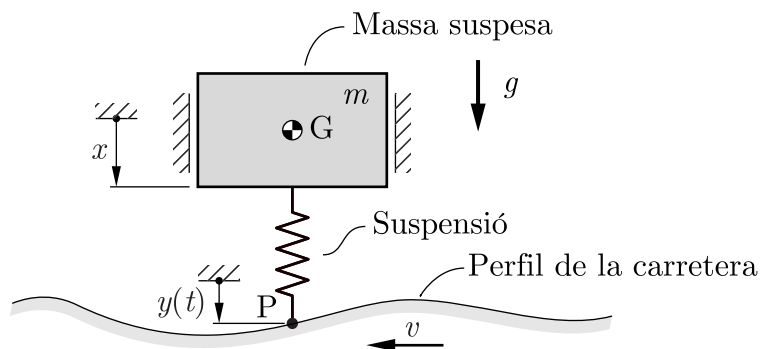


Fig. 9 Vehicle desplaçant-se sobre una carretera rugosa.

Si el vehicle considerat a la figura 4 avança amb velocitat horitzontal constant v per una carretera també horitzontal en mitjana però amb un perfil de rugositat vertical $y(t)$, l'estudi de la suspensió i el confort dels passatgers es pot fer mitjançant el model esquematitzat a la figura 9. El model s'obté per inversió cinemàtica o canvi de refe-



rència de manera que la carretera passa per sota del vehicle que es manté quiet horitzontalment.

En aquest nou model, l'alçada y del perfil de la carretera sota el vehicle és funció de la secció, longitudinal, de la carretera per on circula el vehicle. Aquesta secció es pot definir mitjançant el recorregut s del vehicle sobre el traçat de la carretera, que és proporcional a la velocitat v del vehicle i al temps t . En definitiva doncs, el perfil de la carretera queda descrit en el model com una funció del temps $y(t)$.

La compressió de la suspensió és $x - y(t)$ i l'equació del moviment vertical de la massa suspesa és ara:

$$m \ddot{x} = m g - f(x - y(t)) \quad [10]$$

La definició de posició d'equilibri normalment emprada, posició a la qual si es deixa el sistema en repòs s'hi queda, estrictament no es pot fer servir perquè que el sistema romangui en repòs depèn del sistema i també d' $y(t)$. Queda clar que el sistema no és autònom i que la seva dependència de l'entorn està inclosa en la dependència temporal de l'alçada y del perfil.

La posició d'equilibri trobada anteriorment es pot utilitzar, ara, considerant-la la posició d'equilibri que correspondria si $y(t) = 0$, y permanentment nul·la. Seguint els passos descrits per a trobar les equacions 2 i 3, la linealització de l'equació 10 porta a l'equació:

$$m \ddot{\varepsilon} + k \varepsilon = k y(t) \quad [11]$$

En aquest exemple, s'observa que en l'equació del moviment linealitzada apareixen separats el terme que descriu el sistema, $f(q, \dot{q}, \ddot{q}) = m \ddot{\varepsilon} + k \varepsilon$, i el terme funció del temps, $e(t) = k y(t)$. Quan això passa, sigui el sistema lineal o no, es pot interpretar com que el primer terme descriu el comportament autònom o lliure del sistema i que el segon descriu l'excitació que rep de l'entorn. És una situació molt general per a sistemes lineals i aleshores es parla, en l'àmbit de les vibracions, de sistemes excitats o forçats i de la seva resposta excitada o forçada.

A la figura 10, es mostra l'esquema d'una palanca fixada a terra mitjançant l'articulació O i accionada amb la força $F(t)$ que li és perpendicular. Gràcies a la mo-



lla torsional de comportament lineal de constant k , la palanca es manté en equilibri a φ_0 quan la força d'accionament és nul·la. El moment d'inèrcia de la palanca respecte a l'eix de l'articulació O és I_O i la seva massa és m .

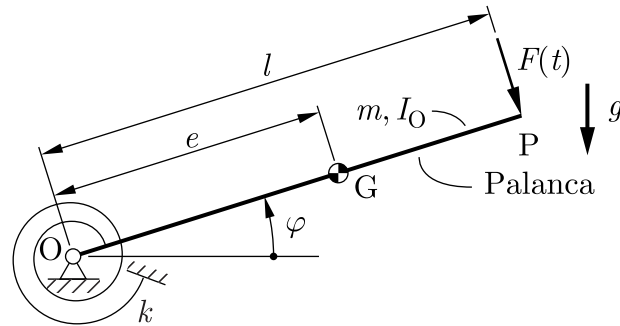


Fig. 10 Palanca accionada per una força exterior.

L'equació del moviment de la palanca és:

$$I_O \ddot{\varphi} + m g e (\cos(\varphi) - \cos(\varphi_0)) + k(\varphi - \varphi_0) = -l F(t) \quad [12]$$

En aquesta expressió, s'observen el terme no lineal que descriu el comportament autònom $f(q, \dot{q}, \ddot{q}) = I_O \ddot{\varphi} + m g e (\cos(\varphi) - \cos(\varphi_0)) + k(\varphi - \varphi_0)$ i el terme d'excitació funció del temps $e(t) = -l F(t)$.

L'equació del moviment de la palanca, expressió 12, linealitzada a l'entorn de la posició d'equilibri φ_0 i prenent $\varepsilon = \varphi - \varphi_0$ és:

$$I_O \ddot{\varepsilon} + (k - m g e \sin(\varphi_0))\varepsilon = -l F(t) \quad [13]$$

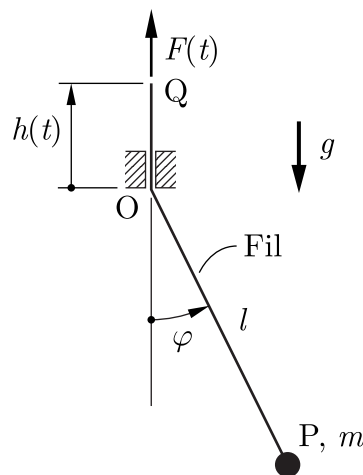


Fig. 11 Pèndol de llargada variable.



A la figura 11, es presenta un nou exemple de sistema no autònom, un pèndol de llargada variable. Una partícula P de massa m està penjada del sostre per mitjà d'un fil, inextensible i de rigidesa a flexió nul·la, de llargada l_0 . La llargada lliure OP del fil es modifica variant l'alçada $h(t)$ del seu extrem Q per a la qual cosa cal fer una força vertical $F(t)$. Aplicant els teoremes vectorials, és senzill obtenir l'equació del moviment en el pla vertical del dibuix i la força $F(t)$:

$$\begin{aligned}
 l\ddot{\varphi} + 2\dot{l}\dot{\varphi} + g\sin(\varphi) &= 0 & \text{amb } l &= l_0 - h(t) \\
 F(t) &= m\left(-\ddot{h} + \dot{h}^2 + g\cos(\varphi)\right)\cos(\varphi)
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

L'equació del moviment es pot linealitzar a l'entorn de $\varphi = 0$, posició d'equilibri per a $h(t) = 0$, i s'obté:

$$l\ddot{\varphi} + 2\dot{l}\dot{\varphi} + g\varphi = 0$$

Tant en l'equació del moviment general com en la linealitzada, s'observa que els coeficients de $\dot{\varphi}$ i $\ddot{\varphi}$ són funcions temporals. En les equacions del moviment lineals vistes en els exemples anteriors, els coeficients de q , \dot{q} i \ddot{q} són constants i en els exemples més simples corresponen directament als paràmetres físics –inèrcia, rigidesa i esmorteïment– del sistema; és per aquesta raó que sovint aquest coeficients s'anomenen paràmetres del sistema. Les vibracions de sistemes no autònoms, que es generen en sistemes com el de la figura 11, atribuïbles a la variació temporal dels seus paràmetres s'anomenen vibracions paramètriques.

3.3 Sistemes d' n graus de llibertat

Els temes i els exemples tractats en els apartats anteriors s'han presentat sota l'òptica de sistemes d'un grau de llibertat; ara bé, tots els conceptes exposats són aplicables a sistemes d' n graus de llibertat. Cal, però, tenir en compte que la feina, probablement més que la complexitat, tant de trobar les equacions del moviment com la seva linealització augmenta molt amb el nombre de graus de llibertat. Cal linealitzar les n equacions del moviment $f_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = 0$, \mathbf{q} és el vector de les n coordenades independents del sistema, utilitzant una expressió equivalent a l'expressió 6 però amb totes les derivades parcials pertinents. Per a un sistema autònom de dos graus de llibertat es té:



$$\begin{cases} f_1(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ddot{q}_1, \ddot{q}_2) = 0 & \mathbf{x}_0 = (q_{1eq}, q_{2eq}, 0, 0, 0, 0) \\ f_2(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ddot{q}_1, \ddot{q}_2) = 0 & \varepsilon_1 = q_1 - q_{1eq}; \quad \varepsilon_2 = q_2 - q_{2eq} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial f_1}{\partial \ddot{q}_1} \right|_{\mathbf{x}_0} \ddot{\varepsilon}_1 + \left. \frac{\partial f_1}{\partial \ddot{q}_2} \right|_{\mathbf{x}_0} \ddot{\varepsilon}_2 + \left. \frac{\partial f_1}{\partial \dot{q}_1} \right|_{\mathbf{x}_0} \dot{\varepsilon}_1 + \left. \frac{\partial f_1}{\partial \dot{q}_2} \right|_{\mathbf{x}_0} \dot{\varepsilon}_2 + \left. \frac{\partial f_1}{\partial q_1} \right|_{\mathbf{x}_0} \varepsilon_1 + \left. \frac{\partial f_1}{\partial q_2} \right|_{\mathbf{x}_0} \varepsilon_2 = 0 \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial \ddot{q}_1} \right|_{\mathbf{x}_0} \ddot{\varepsilon}_1 + \left. \frac{\partial f_2}{\partial \ddot{q}_2} \right|_{\mathbf{x}_0} \ddot{\varepsilon}_2 + \left. \frac{\partial f_2}{\partial \dot{q}_1} \right|_{\mathbf{x}_0} \dot{\varepsilon}_1 + \left. \frac{\partial f_2}{\partial \dot{q}_2} \right|_{\mathbf{x}_0} \dot{\varepsilon}_2 + \left. \frac{\partial f_2}{\partial q_1} \right|_{\mathbf{x}_0} \varepsilon_1 + \left. \frac{\partial f_2}{\partial q_2} \right|_{\mathbf{x}_0} \varepsilon_2 = 0 \end{cases} \quad [15]$$

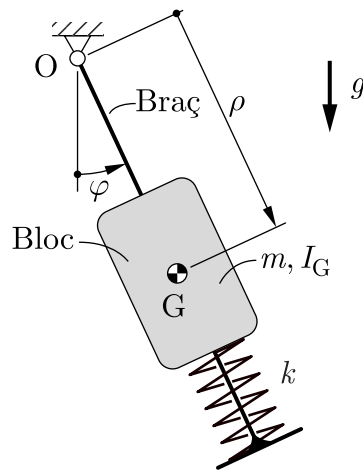


Fig. 12 Pèndol amb bloc lliscant.

La figura 12 mostra l'esquema d'un sistema de dos graus de llibertat en el qual el bloc pot lliscar respecte al braç articulat a O. El braç és d'inèrcia negligible, el bloc és de massa m i el seu moment d'inèrcia respecte a l'eix perpendicular al pla del moviment que passa per G és I_G . La molla és de comportament lineal de constant k i fa una força tal que $\rho = \rho_0$ quan el sistema està en repòs a $\varphi = 0$. Les resistències passives són negligibles. Les equacions del moviment es poden trobar, per exemple, aplicant els teoremes vectorials al bloc i s'obté:

$$\begin{cases} (I_G + m \rho^2) \ddot{\varphi} + 2 \dot{\varphi} \dot{\rho} m + m g \rho \sin(\varphi) = 0 \\ m(\ddot{\rho} - \dot{\varphi}^2 \rho) + k(\rho - \rho_0) = 0 \end{cases}$$

Aquestes equacions es poden linealitzar a l'entorn de $\mathbf{x}_0 = (\rho_0, 0, 0, 0, 0, 0)$ aplicant les expressions 15 i es té:



$$\begin{cases} (I_G + m \rho_0^2) \ddot{\varphi} + m g \rho_0 \varphi = 0 \\ m \ddot{\rho} + k(\rho - \rho_0) = 0 \end{cases}$$

4 Teorema de l'energia

El teorema de l'energia, o principi de conservació de l'energia en un sistema mecànic, en versió diferencial permet determinar l'equació del moviment dels sistemes d'un grau de llibertat, ja sigui l'equació general o directament la linealitzada.

El teorema de l'energia s'aplica a sistemes en els quals tota l'energia que intervé en la seva evolució es pot avaluar com treball fet per forces, interiors al sistema o que hi actuen provinents de l'exterior, i estableix que la variació d'energia cinètica E_c és igual a aquest treball W . Entre dos estats 1 i 2 del sistema es té:

$$\Delta E_c \Big|_1^2 = W \Big|_1^2 \quad [16]$$

El principi de conservació de l'energia estableix, per a tota evolució d'un sistema entre dos estats:

$$E_{\text{Rebuda de l'exterior}} \Big|_1^2 = E_{\text{Cedida a l'exterior}} \Big|_1^2 + \Delta E_{\text{Acumulada a l'interior}} \Big|_1^2 \quad [17]$$

En l'àmbit de la mecànica, cal pensar que el teorema de l'energia és una aplicació del principi de conservació de l'energia de manera que:

- En utilitzar el teorema de l'energia, no cal incloure necessàriament tots els fenòmens no mecànics a través del treball fet per forces no conservatives, sinó que tots o alguns es poden incloure directament a través de l'energia que tenen associada.
- En el principi de la conservació de l'energia, una part de l'energia emmagatzemada pot ser mecànica en forma d'energia cinètica i/o potencial i una part de l'energia intercanviada pot ser mecànica, en forma de treball fet per forces.

Si tota l'energia que intervé en l'evolució d'un sistema es pot avaluar com treball fet per forces, es passa de l'expressió 17 a la 16 simplement aïllant l'energia cinètica. En



l'estudi de vibracions es tracten en principi aquests sistemes, si bé també és habitual considerar fenòmens directament per l'energia que tenen associada; el cas més típic és la consideració de les resistències passives per mitjà de l'energia que dissipen.

Sovint, és útil expressar el teorema de l'energia, o el principi de conservació de l'energia, en versió diferencial:

$$\dot{E}_c = \sum P_i \quad [18]$$

on $P_i = \dot{W}$ o $P_i = \dot{E}$ és la potència associada a les forces o directament al fenomen que té associada l'energia E .

Per a sistemes d'un grau de llibertat l'expressió 18 permet determinar l'equació del moviment, tal com ja s'ha vist a l'exemple de la figura 8, i a partir d'aquí, en aquesta monografia, si no es diu el contrari s'utilitzarà amb aquest objectiu.

4.1 Energia cinètica. Inèrcia reduïda

L'energia cinètica E_c d'un sistema de partícules, agrupades o no en un o més sòlids rígids, és la magnitud escalar additiva:

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_i m(P_i) \mathbf{v}^2(P_i) \quad [19]$$

on $m(P_i)$ és la massa de la partícula P_i i $\mathbf{v}(P_i)$ la seva velocitat.

Cal recordar que per a un sòlid rígid l'energia cinètica es pot calcular com:

$$E_c = E_{c \text{ translació}} + E_{c \text{ rotació}} = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2(G) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T [\mathbf{I}_G] \boldsymbol{\omega} \quad [20]$$

on m és la massa del sòlid, $\mathbf{v}(G)$ és la velocitat del seu centre d'inèrcia G , \mathbf{I}_G és el seu tensor d'inèrcia respecte al centre d'inèrcia i $\boldsymbol{\omega}$ és la seva velocitat angular.

Si el sòlid té moviment pla el terme associat a la rotació es calcula de forma simplificada com:



$$E_c \text{ rotació} = \frac{1}{2} I_G \omega^2 \quad [21]$$

on I_G és el moment d'inèrcia a G per a la direcció perpendicular al pla del moviment.

Si un sòlid té un punt O fix la seva energia cinètica es pot calcular utilitzant només el terme de rotació amb el tensor o moment d'inèrcia a O en lloc de G.

En els sistemes d'un grau de llibertat, si es pren com a tal la derivada \dot{q} de la coordenada generalitzada q la velocitat de tots els seus punts és proporcional a \dot{q} , $\mathbf{v}(P_i) = \mathbf{c}_i(q)\dot{q}$, i per tant la seva energia cinètica és una expressió de la forma:

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_i m(P_i) \mathbf{v}^2(P_i) = \frac{1}{2} \sum_i m(P_i) (\mathbf{c}_i(q)\dot{q})^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_i m(P_i) (\mathbf{c}_i(q))^2 \right) \dot{q}^2 = \frac{1}{2} m(q) \dot{q}^2 \quad [22]$$

$m(q)$ s'anomena inèrcia del sistema reduïda a la coordenada q i tal com es posa de manifest a l'expressió 22 és, en principi, funció de la coordenada generalitzada q .

En l'exemple de la figura 8 l'energia cinètica, tal com s'ha vist, és:

$$E_c = \frac{1}{2} I_O \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_b (e \sin(\varphi))^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} \left(I_O + m_b (e \sin(\varphi))^2 \right) \dot{\varphi}^2$$

Per tant la seva inèrcia reduïda a la coordenada φ és:

$$m(\varphi) = I_O + m_b (e \sin(\varphi))^2$$

4.2 Treball. Potència. Força reduïda

El treball W_{11}^2 fet entre dos estats 1 i 2 per un sistema de forces $\mathbf{F}(P_i)$ aplicades als punts P_i és la magnitud escalar additiva:

$$W_{11}^2 = \sum_i \int_1^2 \mathbf{F}(P_i) \cdot d\mathbf{s}(P_i) = \sum_i \int_1^2 \mathbf{F}(P_i) \cdot \mathbf{v}(P_i) dt \quad [23]$$



La primera integral és al llarg de la trajectòria que P_i recorre per a anar de la posició 1 a la 2 i la segona és al llarg del temps emprat per a anar d'1 a 2.

La potència P d'un sistema de forces $\mathbf{F}(P_i)$ és la derivada temporal de treball que fan:

$$P = \dot{W} = \sum_i \mathbf{F}(P_i) \cdot \mathbf{v}(P_i)$$

Si els punts P_i pertanyen a un sistema d'un grau de llibertat, descrit per la derivada \dot{q} de la coordenada generalitzada q , la velocitat de tots ells és proporcional a \dot{q} , $\mathbf{v}(P_i) = \mathbf{c}_i(q)\dot{q}$, i per tant la potència del sistema de forces que hi són aplicades és una expressió de la forma:

$$P = \sum_i \mathbf{F}(P_i) \cdot \mathbf{v}(P_i) = \sum_i \mathbf{F}(P_i) \cdot \mathbf{c}_i(q)\dot{q} = \left(\sum_i \mathbf{F}(P_i) \cdot \mathbf{c}_i(q) \right) \dot{q} = F_{\text{red}}(q, \dot{q})\dot{q} \quad [24]$$

$F_{\text{red}}(q, \dot{q})$ s'anomena força reduïda del sistema de forces a la coordenada q . Si la coordenada q és angular és usual anomenar a $F_{\text{red}}(q, \dot{q})$ parell reduït. Tal com es posa de manifest a l'expressió 24 la força reduïda és, en principi, funció de posició, descrita per la coordenada generalitzada q , i de velocitat, descrita per \dot{q} .

Tant per al càlcul com per a la identificació de la força reduïda convé tenir-ne present el significat: factor pel qual cal multiplicar la velocitat \dot{q} per a obtenir la potència. Així per exemple, es pot parlar de la força reduïda de les resistències passives i calcular-la a partir de la potència que dissipen.

En l'exemple de la figura 8 si entre el bloc i les guies verticals hi ha frec viscos de coeficient c la potència que dissipa és proporcional al quadrat de la velocitat vertical del bloc:

$$P_{\text{dis. frec}} = -c(e \sin(\varphi))^2 \dot{\varphi}^2$$

Per tant, la força reduïda $F_{\text{red}}(\varphi, \dot{\varphi})$, o parell reduït en aquest cas, de les forces de frec viscos a la coordenada φ és:

$$F_{\text{red}}(\varphi, \dot{\varphi}) = -c(e \sin(\varphi))^2 \dot{\varphi}$$



4.3 Equació del moviment

L'equació del moviment es pot trobar directament amb l'expressió 18 o es pot fer ús de la inèrcia i de la força reduïda. Expressant l'energia cinètica en funció de la inèrcia reduïda i la potència de totes les forces en funció de la força reduïda es té:

$$\begin{aligned}E_c &= \frac{1}{2} m(q) \dot{q}^2 \\ \dot{E}_c &= m(q) \ddot{q} \dot{q} + \frac{1}{2} \left(\frac{dm(q)}{dq} \right) \dot{q} \dot{q}^2 = \left(m(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} m_q(q) \dot{q}^2 \right) \dot{q} \quad \text{amb } m_q(q) = \frac{dm(q)}{dq} \\ P &= F(q, \dot{q}) \dot{q} \\ \dot{E}_c &= P \\ m(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} m_q(q) \dot{q}^2 &= F(q, \dot{q}); \quad m(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} m_q(q) \dot{q}^2 - F(q, \dot{q}) = 0\end{aligned}\quad [25]$$

4.4 Forces conservatives. Energia potencial. Potència

Les forces conservatives, o que deriven de potencial, requereixen un tractament especial perquè s'utilitzen per a modelitzar el comportament elàstic dels materials, causa principal de les vibracions i també per les propietats analítiques que tenen. Les forces de les molles i les forces constants són els casos més habituals.

El treball fet per una força conservativa $\mathbf{F}_c(\mathbf{P})$ depèn només de la posició inicial i final del punt on és aplicada, no depèn de com passa d'una posició a l'altra. Aquesta propietat permet definir per a $\mathbf{F}_c(\mathbf{P})$ la funció de posició $E_p(q)$ –energia potencial– tal que el seu increment entre dues posicions és igual al treball, canviat de signe, que fa en passar de la primera posició a la segona.

$$\Delta E_p \Big|_1^2 = - \int_1^2 \mathbf{F}_c(\mathbf{P}) \cdot d\mathbf{s}(\mathbf{P}) \quad [26]$$

Si s'atribueix energia potencial nul·la a una posició de referència aleshores l'energia potencial $E_p(q)$ en una posició arbitrària, definida per la coordenada generalitzada q , és el treball, canviat de signe, fet en passar de la posició de referència a la posició definida per q .

La potència d'una força conservativa, a partir de la seva energia potencial, és:



$$P_c = -\frac{dE_p(q)}{dt} = -\frac{dE_p(q)}{dq} \frac{dq}{dt} = -\frac{dE_p(q)}{dq} \dot{q} \quad [27]$$

Per tant, la força reduïda, expressió 24, d'una força conservativa és funció únicament de posició i val:

$$F_{\text{red c}}(q) = -\frac{dE_p(q)}{dq} \quad [28]$$

En l'àmbit de les vibracions, és interessant tenir present l'energia potencial del pes, considerat com una força constant, i de les molles de comportament lineal.

L'energia potencial del pes mg a una alçada h per sobre de la posició de referència és:

$$E_{\text{p pes}} = mgh \quad [29]$$

L'energia potencial d'una molla lineal de comportament lineal de constant k quan la seva llargada és l i s'ha pres com a posició de referència la corresponent a la llargada l_0 , en la que fa una força d'atracció entre els seus extrems T_0 , és:

$$E_{\text{p molla}} = T_0(l - l_0) + \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 \quad [30]$$

De manera semblant, es pot fer referència a una molla de torsió de comportament lineal de constant k_t ; la seva energia potencial quan l'angle entre els sòlids extrems és φ i s'ha pres com a angle de referència φ_0 , en el qual fa un parell d'atracció T_0 en el sentit de disminuir l'angle relatiu, és:

$$E_{\text{p molla}} = T_0(\varphi - \varphi_0) + \frac{1}{2}k_t(\varphi - \varphi_0)^2 \quad [31]$$

En l'exemple de la figura 8, l'energia potencial del pes i de la força de la molla es mostren a l'expressió 7 i la força reduïda de les dues és:

$$F_{\text{red c}}(q) = -\frac{dE_p(q)}{dq} = -\left((m_b + m_e)g e \sin(\varphi) + \left(k(l - (h - r)) + T_0 \right) \frac{r h \sin(\varphi)}{l} \right)$$



La definició feta de força conservativa és adequada per a les forces exteriors al sistema considerat (forces que l'exterior fa sobre el sistema) però és excessivament restrictiva per a les forces interiors (entre elements del propi sistema). És freqüent que en forces interiors ni el treball fet per l'acció ni el fet per la reacció siguin independents de la trajectòria dels seus punts d'aplicació, però que en canvi la suma dels dos treballs sí que ho sigui. Aquest és el cas de la major part de molles interiors d'un sistema. És per aquesta raó que és útil estendre el caràcter conservatiu a aquestes forces interiors amb la definició següent:

Una força interior és conservativa si el treball conjunt de l'acció i de la reacció entre dues posicions no depèn de les trajectòries dels dos punts d'aplicació.

Amb aquesta definició són conservatives totes les forces interiors que depenen només de la distància entre els punts d'aplicació i, de fet, aquestes són la gran majoria de forces conservatives de la mecànica.

La potència d'una parella de forces d'acció i reacció no depèn de la referència on es calculi ja que únicament és funció de la variació de la distància –independent de la referència– entre els punts d'aplicació, com es demostra a continuació. La distància entre els punts A i B on estan aplicades l'acció i la reacció és ρ , \mathbf{F} és la força, que té la direcció d'AB (3a llei de Newton) i que, per comoditat, aquí es defineix positiva de repulsió.

$$P = \mathbf{F}_A \cdot \mathbf{v}_A + \mathbf{F}_B \cdot \mathbf{v}_B = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_A - \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_B = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B) = \mathbf{F} \cdot \left(\frac{d\mathbf{OA}}{dt} - \frac{d\mathbf{OB}}{dt} \right) = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{BA}}{dt} = F \frac{d\mathbf{BA}}{dt} \Bigg|_{\text{Direcció AB}} = F \cdot \dot{\rho} \quad [32]$$

L'energia potencial associada a una parella de forces $\mathbf{F}(\rho)$ que depenen només de la distància ρ entre els punts d'aplicació és, segons l'expressió 26 i tenint en compte el resultat de l'expressió 32:

$$\Delta E_p \Big|_1^2 = - \int_1^2 \mathbf{F}_c(\mathbf{P}) \cdot d\mathbf{s}(\mathbf{P}) = - \int_1^2 P dt = - \int_1^2 F(\rho) \dot{\rho} dt = - \int_1^2 F(\rho) d\rho \quad [33]$$

Aquest resultat demostra l'afirmació anterior –són conservatives totes les forces interiors que depenen només de la distància entre els punts d'aplicació– ja que el treball que fan, última integral de l'expressió 33, depèn únicament de ρ .



En particular, les expressions 30 i 31 permeten calcular l'energia potencial de molles de comportament lineal interiors al sistema estudiat. És usual anomenar molla, lineal, a tot element que introdueix una força entre els seus extrems que és únicament funció de la distància entre ells i molla de torsió als elements que introdueixen entre els seus extrems un parell que és funció únicament de l'angle entre ells.

Exemple: determinació de l'equació del moviment mitjançant el teorema de l'energia. Mecanisme de barres articulades

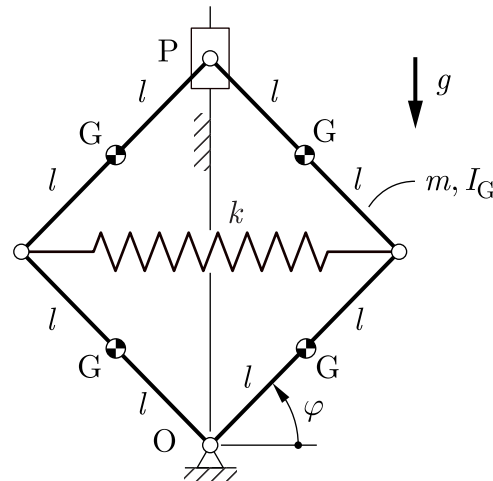


Fig. 13 Mecanisme de 4 barres iguals.

A la figura 13 es mostra l'esquema d'un mecanisme format per 4 barres iguals, de massa m i moment d'inèrcia I_G respecte a l'eix que passa per G i és perpendicular al pla del moviment. O és una articulació fixa i P es mou sobre la vertical d' O . La molla és de comportament lineal de constant k i garanteix l'equilibri per a $\varphi_{eq} = 45^\circ$. L'energia cinètica i l'energia potencial, del pes de les barres i de la molla interior, prenent com a referència la configuració definida per $\varphi = 0$ són:

$$\begin{cases} E_c = \frac{1}{2} \left(4 I_G + (4 + 16 \cos^2(\varphi)) m l^2 \right) \dot{\varphi}^2 \\ E_p = 8 m g l \left(\sin(\varphi) + \cos(\varphi) - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 2 k l^2 \left(\cos(\varphi) - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \end{cases} \quad [34]$$

La inèrcia del conjunt reduïda a la coordenada φ i la força reduïda de totes les forces conservatives a la coordenada φ són:



$$m(\varphi) = 4 I_G + (4 + 16 \cos^2(\varphi)) m l^2$$

$$F_{\text{red c}}(\varphi) = -\frac{d E_p(\varphi)}{d \varphi} = 8 m g l (-\cos(\varphi) + \sin(\varphi)) + 4 k l^2 \left(\cos(\varphi) - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \sin(\varphi) \quad [35]$$

A partir de l'expressió 25, l'equació del moviment és:

$$\begin{aligned} & (4 I_G + (4 + 16 \cos^2(\varphi)) m l^2) \ddot{\varphi} - (16 m l^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi)) \dot{\varphi}^2 \\ & - 8 m g l (-\cos(\varphi) + \sin(\varphi)) - 4 k l^2 \left(\cos(\varphi) - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \sin(\varphi) = 0 \end{aligned} \quad [36]$$

Si es linealitzava a l'entorn de la posició d'equilibri, $\varphi_{\text{eq}} = 45^\circ$, es té:

$$(4 I_G + 12 m l^2) \ddot{\varphi} + (2 k l^2 - 8 \sqrt{2} m g l) (\varphi - \varphi_{\text{eq}}) = 0$$

4.5 Sistemes conservatius. Energia mecànica

Un sistema és conservatiu si totes les forces, interiors o exteriors, aplicades a punts del sistema i que fan treball són conservatives. Aquesta definició exclou de tenir caràcter conservatiu als sistemes:

- Amb resistències passives, forces o parells, que es caracteritzen per oposar-se al moviment i fer treball negatiu sempre que hi ha moviment dels seus punts d'aplicació. En el cas de resistències passives interiors, una de les forces, l'acció o la reacció, pot fer treball no negatiu però globalment entre les dues és negatiu. És el cas del frec sec o de Coulomb, del frec viscos, de la resistència al rodolament i al pivotament, dels frens...
- No autònoms, caracteritzats per la presència de motors (elements que fan forces o parells interiors o exteriors funció del temps) o actuadors (elements que imposen moviments funció del temps a punts del sistema o a punts exteriors que interaccionen amb punts del sistema). És el cas dels motors, rotatius o lineals, elèctrics, hidràulics... o altres motors o actuadors no convencionals (un operari, un actuator piezoelèctric...) que també introdueixen energia mecànica al sistema. Si bé, usualment, s'entenen els motors i actuadors com a elements que introdueixen energia mecànica cal incloure també els elements especialment previstos per extreure'n; aquest és el cas, per exemple, dels generadors elèctrics.



Si bé referir-se a forces és suficient des del punt de vista operatiu sovint és pràcticament indispensable referir-se també a parells: el parell d'una molla de torsió és conservatiu, el parell motor i el parell de les resistències passives no són conservatius...

Els punts o els sòlids als quals els actuadors imposen el moviment en algun context se'ls coneix com a obstacles mòbils. La presència d'actuadors fa que alguna o algunes de les equacions d'enllaç entre les coordenades generalitzades que es fan servir per descriure la configuració del sistema depenguin explícitament del temps. Aquestes equacions, en l'àmbit de la teoria de màquines, es coneixen com a equacions de govern i, en d'altres, com a equacions d'enllaç rehònomes (en contraposició a les esclerònomes que no depenen explícitament del temps).

Són sistemes conservatius els sistemes formats únicament per inèrcies (partícules o sòlids) sobre les quals actuen forces constants, com ara usualment el pes, i per molles, de comportament lineal o no, que si tenen un extrem fora del sistema és fix. Queden incloses les forces provinents de camps centrals, atracció gravitatòria i electrostàtica, que tenen el mateix comportament que les molles, no lineals. Cal remarcar, també, que en aquests sistemes hi queden inclosos els sòlids deformables, sempre que la deformació es pugui considerar elàstica, i els fluids no viscosos. Aquests són els sistemes conservatius usualment estudiats.

Els sistemes mostrats a les figures 4, 7, 12 i 13 s'han considerat sense resistències passives i les úniques forces que hi fan treball són el pes i les forces de molles interiors (sistema de la figura 13) o exteriors amb un extrem fix a l'exterior (sistemes de les figures 4, 7, 12); són per tant conservatius. El sistema de la figura 8 inicialment s'ha considerat sense resistències passives i en aquesta situació és conservatiu; més endavant s'han considerat les resistències passives a les guies verticals i, per tant, allà és no conservatiu. El sistema de la figura 12 és conservatiu i de dos graus de llibertat.

El sistema de la figura 10 és conservatiu o no segons no actuï o sí la força $F(t)$ en el seu extrem.

Els sistemes mostrats a les figures 9 i 11 no són conservatius tot i no considerar resistències passives ja que són sistemes no autònoms. En el sistema de figura 9, l'extrem inferior P de la molla de la suspensió està obligat a seguir un moviment $y(t)$ imposat pel perfil de la carretera. Si aquest punt es considera interior al sistema la molla és conservativa, perquè és interior, però aleshores cal tenir en compte la força que l'exterior fa sobre P; la carretera es comporta com un actuator exterior que imposa el



moviment vertical de la roda, punt P, fent una força que no és conservativa. Si aquest punt es considera fora del sistema aleshores la molla no és conservativa perquè només té un extrem dins del sistema i l'altre no és fix.

El sistema de la figura 10 no és autònom a causa de la força $F(t)$. En el sistema de la figura 11, és l'extrem superior del fil el que està obligat a moure's verticalment per un actuator que imposa una llei temporal $h(t)$ i que per a aconseguir-ho requereix fer una força $F(t)$.

Si s'aplica el teorema de l'energia a un sistema conservatiu, expressió 16, es té:

$$\Delta E_c \Big|_1^2 = W \Big|_1^2 = -\Delta E_p \Big|_1^2; \quad \Delta (E_c + E_p) \Big|_1^2 = 0; \quad \Delta E_m \Big|_1^2 = 0 \quad [37]$$

L'energia cinètica només depèn de l'estat mecànic del sistema, definit per la configuració q i la velocitat \dot{q} , i l'energia potencial només depèn de la configuració de manera que $E_m = E_c + E_p$ només depèn de l'estat mecànic del sistema i s'anomena energia mecànica. En definitiva, l'energia mecànica d'un sistema conservatiu es manté constant en tot moviment.

4.6 Equació del moviment de sistemes conservatius. Posició d'equilibri. Linealització

L'equació del moviment d'un sistema conservatiu es pot determinar fent ús de l'expressió 25 i de la força reduïda $F_{\text{red } c}(q)$ de totes les forces conservatives, expressió 28, de manera que es té:

$$m(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}m_q(q)\dot{q}^2 - F_{\text{red } c}(q) = 0; \quad F_{\text{red } c}(q) = -\frac{dE_p(q)}{dq} \quad [38]$$

$$m(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}m_q(q)\dot{q}^2 + \frac{d}{dq}E_p(q) = 0$$

D'aquesta equació, es dedueix fàcilment la condició que han de complir les posicions d'equilibri dels sistemes conservatius. Si a l'expressió 38 es fan zero la velocitat i l'acceleració, condició que s'ha de complir en tota posició d'equilibri, es té:



$$\left. \frac{dE_p(q)}{dq} \right|_{eq} = 0 \quad [39]$$

Així doncs, en les posicions d'equilibri l'energia potencial pren valors extrems, màxims o mínims, i és aquesta propietat la usualment emprada per a determinar-les. Més endavant, es veurà que els màxims corresponen a posicions d'equilibri inestables i els mínims a posicions d'equilibri estables.

És interessant observar que si a un sistema conservatiu s'hi afegeixen forces funció de velocitat que s'anul·len quan aquesta és zero, les posicions d'equilibri segueixen verificant la mateixa condició 39, ja que si bé les forces funció de velocitat introdueixen un terme addicional a la força reduïda aquest s'anul·la en aplicar la condició per a trobar les posicions d'equilibri. Aquest és el cas, freqüent, del frec viscos que genera forces proporcionals a la velocitat.

L'equació del moviment genèrica donada per l'expressió 38 es pot linealitzar a l'entorn d'una posició d'equilibri q_{eq} sense necessitat de particularitzar el sistema estudiat i dóna lloc a un procediment per a obtenir directament l'equació del moviment linealitzada. Fent ús de l'expressió 6 i recordant que $\mathbf{x}_0 = (q_{eq}, 0, 0)$ i $\varepsilon = q - q_{eq}$ ($\dot{\varepsilon} = \dot{q}$, $\ddot{\varepsilon} = \ddot{q}$) s'obté:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial \ddot{q}} \right|_{x_0} &= m(q) \Big|_{x_0} = m(q_{eq}) \\ \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{q}} \right|_{x_0} &= m_q(q) \dot{q} \Big|_{x_0} = 0 \end{aligned} \quad [40]$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial q} \right|_{x_0} &= \left(m_q(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} m_{qq}(q) \dot{q}^2 + \frac{d^2 E_p}{dq^2} \right) \Big|_{x_0} = \left. \frac{d^2 E_p}{dq^2} \right|_{q_{eq}} \\ m(q_{eq}) \ddot{\varepsilon} + \left. \frac{d^2 E_p}{dq^2} \right|_{q_{eq}} \varepsilon &= 0 \end{aligned} \quad [41]$$

Per comparació amb l'equació del moviment, expressió 3, d'un sistema elemental massa-molla, com el de la figura 4, i per a uniformitzar la nomenclatura al coeficient



$\left. \frac{d^2 E_p}{dq^2} \right|_{q_{eq}}$ se'l sol anomenar k_{red} rigidesa del sistema reduïda a la coordenada q o a la coordenada ε .

Aquesta expressió 41 és la més usualment emprada per a trobar l'equació del moviment linealitzada de sistemes conservatius d'un grau de llibertat. El passos per a arribar-hi són:

- Determinar l'expressió de l'energia potencial $E_p(q)$.
- Trobar la posició d'equilibri q_{eq} d'interès a partir del extrems d' $E_p(q)$, expressió 39.
- Calcular l'energia cinètica per a la posició d'equilibri q_{eq} i identificar la inèrcia reduïda $m(q_{eq})$.
- Derivar dues vegades $E_p(q)$ i particularitzar per a la posició d'equilibri q_{eq} .
- Substituir a l'expressió 41.

A l'equació del moviment obtinguda, $m(q_{eq})$ és sempre positiva ja que prové del càlcul de l'energia cinètica, expressió 22, que és positiva, sempre que la inèrcia no sigui totalment nul·la. $\varepsilon(t)$ com a solució que és d'una equació diferencial lineal és la combinació lineal de dues exponencials

$$\varepsilon(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$$

on s_1 i s_2 són les arrels de l'equació característica

$$m(q_{eq})s^2 + \left. \frac{d^2 E_p}{dq^2} \right|_{q_{eq}} s = 0 \quad \rightarrow \quad s_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{1}{m(q_{eq})} \left. \frac{d^2 E_p}{dq^2} \right|_{q_{eq}}}$$

Si $\left. \frac{d^2 E_p}{dq^2} \right|_{q_{eq}}$ és negativa s_1 és real i positiva i $\varepsilon(t)$ creix exponencialment amb la més petita pertorbació, donada per unes condicions inicials, i el sistema s'aparta per sempre de la posició d'equilibri, que per tant és inestable.

Si $\left. \frac{d^2 E_p}{dq^2} \right|_{q_{eq}}$ és positiva s_1 i s_2 són complexos conjugades, de mòdul ω_0 , i la solució $\varepsilon(t)$ és una funció harmònica, expressió 42. Siguin quines siguin les condicions amb les quals s'inicia el moviment, el sistema es mou permanentment al voltant de la posició d'equilibri i es diu que el comportament del sistema en aquesta posició d'equilibri és críticament estable.



$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{m(q_{\text{eq}})} \frac{d^2 E_p}{dq^2} \Big|_{q_{\text{eq}}}} ; \quad \varepsilon(t) = C \cos(\omega_0 t + \theta) = C \cos(2\pi f_0 t + \theta) \quad [42]$$

S'anomenen pulsació pròpia del sistema a ω_0 i freqüència pròpia del sistema a $f_0 = \omega_0/(2\pi)$. Aquesta freqüència és, segons es veu a l'expressió 42, la freqüència de les oscil·lacions del sistema, causades per unes condicions inicials que l'han apartat de l'equilibri, que en ser autònom vibra lliurement sense la intervenció de forces funció del temps que condicionin el moviment ja que no n'apareix cap a l'equació del moviment. La freqüència f_0 només depèn de les característiques del sistema, d'aquí el nom de pròpia; ara bé les constants C i θ depenen del valor concret de les condicions inicials.

Si $d^2 E_p/dq^2 \Big|_{q_{\text{eq}}}$ és nul·la la funció $E_p(q)$ presenta un punt d'inflexió de pendent horitzontal a la posició d'equilibri q_{eq} . La solució de l'equació del moviment és $\varepsilon(t) = C_1 + C_2 t$ i per tant la posició d'equilibri és inestable.

Exemple: estudi d'un sistema conservatiu. Mecanisme de jou escocès

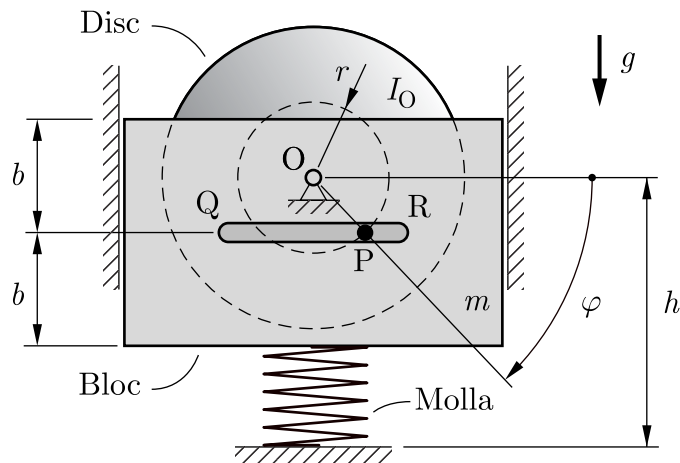


Fig. 14 Mecanisme de jou escocès.

El mecanisme de jou escocès de la figura 14 es mou en el pla vertical, el disc gira articulats pel seu centre al punt fix O , el bloc es pot moure guiat verticalment arrossegat pel pivots P fix al disc i que es mou dins de la ranura horitzontal QR del bloc. El centre d'inèrcia del disc coincideix amb el seu centre geomètric i el seu moment d'inèrcia respecte a l'eix perpendicular al pla del moviment i que passa per aquest punt és I_O . La massa del bloc és m . Les resistències passives són negligibles. La molla és de com-



portament no lineal i la força de repulsió que fa entre els seus extrems funció de la seva llargada l és:

$$F_m = F_0 \tan\left(\frac{\pi}{2} \frac{l_0 - l}{l_0}\right) = F_0 \cot\left(\frac{\pi}{2} \frac{l}{l_0}\right) \quad [43]$$

on l_0 és la llargada quan està distesa i F_0 és una constant¹. La llargada l de la molla funció de l'angle φ és :

$$l(\varphi) = h - b - r \sin(\varphi) \quad [44]$$

L'energia cinètica del conjunt és la suma de l'energia cinètica de rotació del disc, que gira amb velocitat angular $\dot{\varphi}$, i l'energia cinètica de translació del bloc, que es trasllada amb velocitat vertical $\dot{\varphi} r \cos(\varphi)$:

$$\begin{aligned} E_c = E_{c \text{ disc}} + E_{c \text{ bloc}} &= \frac{1}{2} I_O \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m (r \cos(\varphi))^2 \dot{\varphi}^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left(I_O + m (r \cos(\varphi))^2 \right) \dot{\varphi}^2 \end{aligned} \quad [45]$$

D'aquesta expressió de l'energia cinètica, és immediat identificar la inèrcia reduïda del conjunt, expressió 22:

$$m(\varphi) = I_O + m (r \cos(\varphi))^2 \quad [46]$$

L'energia potencial total és l'energia potencial del pes i la de la molla. Si es pren com a posició de referència per a l'expressió de l'energia potencial del pes la corresponent a $\varphi = 0$ l'energia potencial del pes del disc és sempre nul·la i per tant:

$$E_{p \text{ pes}} = -m g r \sin(\varphi) \quad [47]$$

¹ La utilització de la funció tangent, a causa de la seva asímptota vertical, pot ser de força utilitat per a modelitzar saturacions com és el cas d'elements elàstics a compressió, en particular topalls. S'utilitza en la modelització de pneumàtics i se n'ha provat la utilització en la caracterització d'amortidors per a vehicles, amb resultats convinents.

L'energia potencial de la molla cal calcular-la per integració a partir de l'expressió 33; es pren com a posició de referència la corresponent a la molla distesa.

$$E_{p \text{ molla}}(l) = -\int_1^l F(l) dl = -\int_{l_0}^l F_0 \cot\left(\frac{\pi l}{2 l_0}\right) dl = -\frac{2 F_0 l_0}{\pi} \ln\left(\sin\left(\frac{\pi l}{2 l_0}\right)\right) \quad [48]$$

A la figura 15, es mostra la força i l'energia potencial de la molla. En el gràfic de la força s'observa com la rigidesa de la molla, pendent de la corba, creix amb la deformació, situació prou freqüent en els elements elàstics usals.

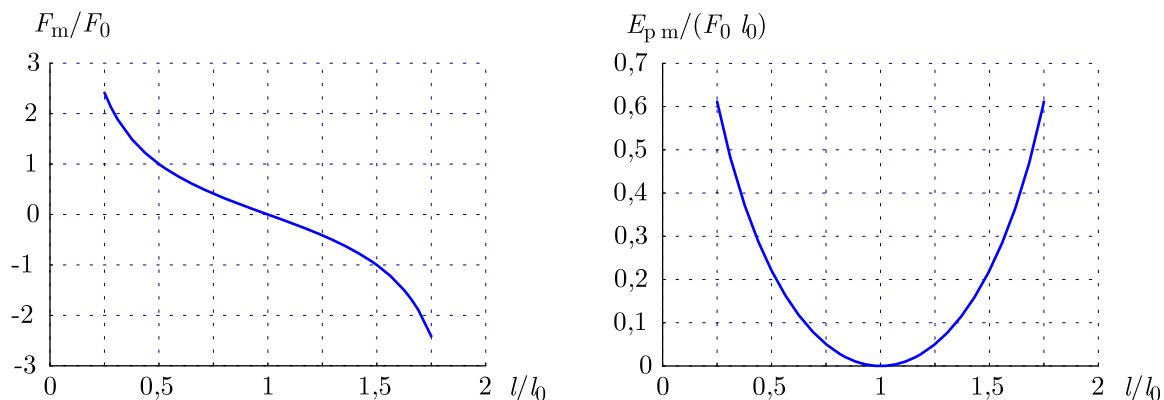


Fig. 15 Força i energia potencial de la molla.

L'energia potencial total s'obté sumant 47 i 48. El fet que l'energia del pes i la de la molla estiguin expressades prenent posicions de referència diferents no importa ja que prendre una o altra posició de referència només afecta en una constant, que no és significativa en els càlculs posteriors que requereixen només les derivades temporals de l'energia potencial.

$$E_p = E_{p \text{ pes}} + E_{p \text{ molla}} = -m g r \sin(\varphi) - \frac{2 F_0 l_0}{\pi} \ln\left(\sin\left(\frac{\pi l}{2 l_0}\right)\right) \quad [49]$$

A partir d'aquesta expressió de l'energia potencial global, es pot trobar la posició d'equilibri utilitzant la condició que sigui màxima (posició d'equilibri inestable) o mínima (posició d'equilibri estable), expressió 39.



$$\begin{aligned} \frac{dE_p(\varphi)}{d\varphi} &= \frac{dE_{p \text{ pes}}(\varphi)}{d\varphi} + \frac{dE_{p \text{ molla}}(l)}{dl} \frac{dl(\varphi)}{d\varphi} = \\ &-m g r \cos(\varphi) + F_0 \cot\left(\frac{\pi l}{2 l_0}\right) r \cos(\varphi) = \left[-m g + F_0 \cot\left(\frac{\pi l}{2 l_0}\right)\right] r \cos(\varphi) \quad [50] \\ \left. \frac{dE_p(\varphi)}{d\varphi} \right|_{\text{eq}} = 0 &\rightarrow \begin{cases} \varphi_{\text{eq}} = \pm \frac{\pi}{2} \\ \varphi_{\text{eq}} = \arcsin\left(\frac{1}{r} \left(h - b - \frac{2l_0}{\pi} \operatorname{arccot}\left(\frac{m g}{F_0}\right) \right)\right) \end{cases} \end{aligned}$$

Una vegada trobades les posicions d'equilibri es poden considerar prou evidents. En la primera i la segona, la recta OP està vertical, no així, en principi, en la tercera. En les dues primeres, la suma de forces sobre el bloc és sempre nul·la: en direcció horitzontal és evident i en direcció vertical el piu P, que es troba just a la vertical d'O sempre pot fer la força que calgui sobre el bloc per anul·lar la suma de la força de la molla i el pes del bloc sense fer moment respecte al centre del disc. La tercera posició d'equilibri correspon, com es pot veure a les expressions 50, a la posició en la qual el pes iguala la força de la molla; en repòs sense acceleració, tal com es determinen les posicions d'equilibri, el piu P no pot fer cap força sobre el bloc ja que si ho fes el disc rebria un moment respecte al seu eix; això no pot ser ja que el seu centre d'inèrcia coincideix amb el seu eix de gir.

L'equació del moviment general es pot trobar fent la derivació corresponent de l'energia cinètica, expressió 45, i la de l'energia potencial, expressió 49, i substituint a l'expressió del teorema de l'energia en versió diferencial, expressió 18. Alternativament, i de manera força raonable en tractar-se d'un sistema conservatiu, se suggereix trobar l'equació del moviment substituint la inèrcia reduïda, expressió 46, i la derivada de l'energia potencial, expressió 50, a l'expressió 38. L'equació del moviment que s'obté és:

$$\begin{aligned} \left(I_O + m(r \cos(\varphi))^2 \right) \ddot{\varphi} - \frac{1}{2} m r^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 + \\ \left[-m g + F_0 \cot\left(\frac{\pi l}{2 l_0}\right) \right] r \cos(\varphi) = 0 \quad [51] \end{aligned}$$

Per a trobar l'equació de moviment linealitzada segons l'expressió 41, cal fer la derivada segona de l'energia potencial, la primera ja s'ha fet per trobar les posicions d'equilibri, expressió 50, i s'obté:



$$\frac{d^2 E_p(\varphi)}{d\varphi^2} = m g r \sin(\varphi) - F_0 \cot\left(\frac{\pi}{2} \frac{l}{l_0}\right) r \sin(\varphi) + F_0 r^2 \cos^2(\varphi) \frac{\pi}{2 l_0} \csc^2\left(\frac{\pi}{2} \frac{l}{l_0}\right) \quad [52]$$

Per a la posició d'equilibri $\varphi_{\text{eq}} = \pi/2$ l'equació de moviment linealitzada és:

$$I_O \ddot{\varphi} + \left(m g - F_0 \cot\left(\frac{\pi}{2} \frac{(h-b-r)}{l_0}\right) \right) r \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) = 0 \quad [53]$$

Per a la posició d'equilibri $\varphi_{\text{eq}} = -\pi/2$ l'equació de moviment linealitzada és:

$$I_O \ddot{\varphi} + \left(-m g + F_0 \cot\left(\frac{\pi}{2} \frac{(h-b+r)}{l_0}\right) \right) r \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) = 0 \quad [54]$$

A les dues equacions anteriors s'observa que la inèrcia reduïda no depèn de la massa del bloc; això és conseqüència del fet que aquestes posicions són punts morts per al moviment vertical del bloc, la seva velocitat vertical és forçosament nul·la i, per tant, en elles aquest no aporta energia cinètica. L'estabilitat depèn de la força de la molla comparada amb el pes. Així, per exemple, la posició d'equilibri $\varphi_{\text{eq}} = \pi/2$ és inestable si la força de la molla supera al pes i la posició d'equilibri $\varphi_{\text{eq}} = -\pi/2$ és estable si la força de la molla supera al pes.

Per a obtenir unes expressions de complexitat raonable, en analitzar la tercera posició d'equilibri es prenen els paràmetres amb les següents relacions:

$$F_0 = m g ; \quad l_0 = h ; \quad b = h/2$$

Amb aquestes relacions, s'obté:

$$\varphi_{\text{eq}} = 0 ; \quad \left. \frac{d^2 E_p}{d\varphi^2} \right|_{\varphi_{\text{eq}}} = m g \frac{\pi r^2}{h} ; \quad m(\varphi_{\text{eq}}) = I_O + m r^2$$

L'equació del moviment linealitzada és:

$$\left(I_O + m r^2 \right) \ddot{\varphi} + m g \frac{\pi r^2}{h} \varphi = 0 \quad [55]$$



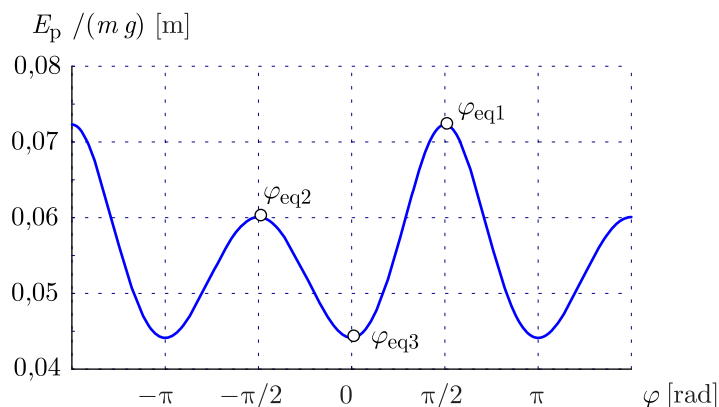


Fig.16 Energia potencial del sistema i posicions d'equilibri.

En el gràfic de la figura 16, es mostra l'energia potencial del sistema per a la relació de paràmetres anterior i $h = 0,2$ m i $r = 0,05$ m. En aquest cas, les posicions d'equilibri són $\varphi_{eq} = 0$ estable, mínim d'energia potencial, i $\varphi_{eq} = \pm\pi/2$ inestables, màxims d'energia potencial. És interessant remarcar el fet general que en correspondre les posicions d'equilibri a extrems de l'energia potencial, les posicions d'equilibri estables i les inestables estan alternades; entre dos màxims hi ha d'haver un mínim i a l'inversa.

La freqüència pròpia f_0 de les oscil·lacions a l'entorn d'aquesta posició d'equilibri estable $\varphi_{eq} = 0$ és, expressió 42:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{m(q_{eq})} \frac{d^2 E_p}{dq^2} \Big|_{q_{eq}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m g \pi r^2}{(I_O + m r^2) h}}$$

5 Mètode de l'energia

El mètode de l'energia es planteja en molta bibliografia i permet determinar la freqüència pròpia dels sistemes conservatius i, de fet, no és més que una nova visió del què s'ha presentat fins aquí per a aquests sistemes. El mètode parteix de la conservació de l'energia mecànica en els sistemes conservatius, expressió 37.

$$\Delta(E_c + E_p) \Big|_1^2 = 0; \quad E_c + E_p = \text{const}; \quad E_{c1} + E_{p1} = E_{c2} + E_{p2}$$



Si es pren la posició 1 que coincideixi amb la posició d'equilibri estable i aquesta es pren com a posició de referència per a l'energia potencial es té que $E_{p1} = 0$ i que E_{c1} és màxima, ja que l'energia potencial és mínima per trobar-se el sistema en una posició d'equilibri estable. Si la posició 2 s'agafa com aquella en la qual l'amplitud del moviment és màxima, la qual cosa implica que la velocitat és nul·la, es té $E_{c2} = 0$ i per tant E_{p2} és màxima. En resum doncs, en el moviment d'un sistema conservatiu:

$$E_{c \text{ màx}} = E_{p \text{ màx}} \quad [56]$$

L'energia cinètica es pot expressar en funció de la inèrcia reduïda, expressió 22, i a l'entorn d'una posició d'equilibri es pot formular fent el desenvolupament en sèrie de Taylor de la energia cinètica en funció de la posició q i la velocitat \dot{q} , $E_c(q, \dot{q})$, al voltant d' $\mathbf{x}_0 = (q_{\text{eq}}, 0)$.

$$E_c(q, \dot{q}) = E_c(\mathbf{x}_0) + \left. \frac{\partial E_c}{\partial q} \right|_{\mathbf{x}_0} (q - q_{\text{eq}}) + \left. \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}} \right|_{\mathbf{x}_0} \dot{q} + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 E_c}{\partial q^2} \right|_{\mathbf{x}_0} (q - q_{\text{eq}})^2 + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 E_c}{\partial \dot{q}^2} \right|_{\mathbf{x}_0} \dot{q}^2 + \left. \frac{\partial^2 E_c}{\partial q \partial \dot{q}} \right|_{\mathbf{x}_0} (q - q_{\text{eq}}) \dot{q} + \dots =$$

Els coeficients dels termes 1, 2, 3, 4 i 6 de la dreta de l'expressió anterior són nuls ja que contenen \dot{q} i estan particularitzats a \mathbf{x}_0 , on $\dot{q} = 0$. En definitiva doncs:

$$E_c(q, \dot{q}) = \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E_c}{\partial \dot{q}^2} \right|_{\mathbf{x}_0} \dot{q}^2 + O^3 \approx \frac{1}{2} m(q_{\text{eq}}) \dot{q}^2$$

L'energia potencial a l'entorn de la posició d'equilibri es pot formular fent el seu desenvolupament en sèrie de Taylor:

$$E_p(q) = E_p(q_{\text{eq}}) + \left. \frac{d E_p}{d q} \right|_{q_{\text{eq}}} (q - q_{\text{eq}}) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 E_p}{d q^2} \right|_{q_{\text{eq}}} (q - q_{\text{eq}})^2 + \dots$$

El primer coeficient és nul perquè s'ha pres la posició d'equilibri com a posició de referència; el segon coeficient és nul perquè està particularitzat per a la posició



d'equilibri, on l'energia potencial és un extrem. Si com és usual es pren l'origen de coordenades a la posició d'equilibri es té:

$$E_p(q) = \frac{1}{2} \frac{d^2 E_p}{dq^2} \Big|_{q_{eq}} q^2 + O^3 \approx \frac{1}{2} \frac{d^2 E_p}{dq^2} \Big|_{q_{eq}} q^2 \quad [57]$$

El moviment lliure dels sistemes autònoms de comportament lineal és harmònic de freqüència f_0 , pulsació $\omega_0 = 2\pi f_0$, com s'ha vist. Així doncs:

$$\begin{aligned} q(t) &= q_p \cos(\omega_0 t + \theta) \quad \rightarrow \quad E_{p \text{ màx}} = \frac{1}{2} \frac{d^2 E_p}{dq^2} \Big|_{q_{eq}} q_p^2 \\ \dot{q}(t) &= q_p \omega_0 \cos(\omega_0 t + \theta + \pi/2) \quad \rightarrow \quad E_{c \text{ màx}} = \frac{1}{2} m(q_{eq}) \omega_0^2 q_p^2 \end{aligned} \quad [58]$$

Substituint els resultats de l'expressió 58 a l'expressió 56 es retroba la pulsació pròpia de l'expressió 42.

Si per algun procediment diferent a l'explicat, linealització de l'expressió general, es determina directament l'aproximació quadràtica de l'energia potencial, o si el sistema és de comportament lineal, el terme $d^2 E_p / dq^2 \Big|_{q_{eq}}$ s'identifica com el coeficient d'aquesta expressió quadràtica de l'energia potencial, expressió 57, sense necessitat de la derivació i posterior particularització.

6 Mètode de Rayleigh (John W. Strutt, Lord Rayleigh). Paràmetres distribuïts

Quan en un sistema mecànic hi ha cossos que cal considerar com a medis continus elàstics, poden considerar-se formats per un nombre infinit de partícules. Per a especificar la posició de totes les partícules d'un cos cal un nombre infinit de coordenades, que es manipulen com a funcions contínues i les seves primera i segona derivades respecte al temps donen la velocitat i l'acceleració de les partícules. Si s'identifica cada partícula per la seva posició en repòs \mathbf{x} , en principi són tres components, el moviment dels cossos queda descrit pel del conjunt de partícules i , per tant, per una funció de la posició i del temps $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Per a cossos que es poden considerar sistemes conservatius



de comportament lineal, per exemple sòlids que es deformen en zona força-deformació lineal, aquesta funció es pot escriure com una suma, en principi infinita, de termes producte de dues funcions de variables separades, una funció de la posició i l'altra funció del temps, $\mathbf{v}_i(\mathbf{x}, t) = \mathbf{p}_i(\mathbf{x})q_i(t)$. Per a cadascun d'aquests termes en un instant de temps t , $q_i(t)$ és un valor únic per a totes les partícules i , per tant, el cos té la forma definida per $\mathbf{p}_i(\mathbf{x})$ escalada segons $q_i(t)$. A aquestes formes definides per $\mathbf{p}_i(\mathbf{x})$ se les anomena formes modals o simplement modes (propis de vibració) i a les funcions $q_i(t)$ se les anomena coordenades modals.

L'estudi i la determinació de les formes modals es desenvolupa usualment primer per a sistemes d'un nombre finit de graus de llibertat, sistemes d' n graus de llibertat, i posteriorment per a sistemes continus, en principi cossos de geometria simple –barra cilíndrica, biga recta, etc. Els cossos geomètricament complexos, que són la majoria, requereixen ser discretitzats, el seu comportament ser descrit amb un gran nombre, però finit, de graus de llibertat i ser estudiats amb el mètode dels elements finits.

Per a la determinació de la freqüència pròpia més baixa de sistemes amb elements elàstics d'inèrcia no negligible o amb elements amb inèrcia no rígids –molles de mida gran, bigues que suporten masses, etc.– Rayleigh proposa utilitzar el procediment basat en l'energia, versió diferencial del teorema de l'energia o mètode de l'energia, suposant una forma modal $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ raonable d'aquests elements, que evidentment ha de complir les condicions de contorn. L'elecció de la forma és equivalent a introduir enllaços addicionals que redueixen el sistema a un d'un grau de llibertat descrit per la coordenada modal q . Aquests enllaços només poden incrementar la rigidesa del sistema i per tant incrementar la freqüència pròpia, de manera que en tots els casos les freqüències trobades pel mètode de Rayleigh –freqüència de Rayleigh– són aproximacions del valor exacte per excés. Dit d'una altra manera, la freqüència pròpia és un mínim de la freqüència de Rayleigh en funció de la forma modal, fet que es demostra a la bibliografia. Aquesta propietat és la base del mètode de Rayleigh-Ritz que refina el càlcul de les freqüències pròpies al mateix temps que ajusta les formes modals i també justifica la relativa insensibilitat de la freqüència de Rayleigh a la forma modal.

6.1 Energia potencial interna. Exemples

El càlcul de l'energia potencial associada a les forces interiors d'un cos elàstic requereix, en principi, la integració estesa a tot el volum del cos de l'energia potencial associada a cadascuna de les forces entre partícules, que es calcula tal com s'ha vist a



les expressions 32 i 33. El càlcul directe amb aquest procediment pot resultar molt complicat.

El càlcul de l'energia potencial en una deformació produïda per forces exteriors conegudes pot resultar més lleuger si és té en compte el següent.

L'increment d'energia potencial només depèn de les posicions inicial i final, no de com s'hi ha passat; així doncs s'hi pot passar amb una evolució a velocitat i acceleració negligibles. D'aquesta manera, les úniques forces que han fet treball són les forces exteriors i les interiors funció de posició, que són les que deriven de potencial. El teorema de l'energia permet afirmar que el treball fet per totes les forces és nul i per tant l'increment de l'energia potencial de les forces interiors és igual al treball fet per les forces exteriors que han deformat el cos, expressió 59.

$$\Delta E_c \Big|_1^2 = W \Big|_1^2 = W_{\text{ext}} \Big|_1^2 + W_c \Big|_1^2 = 0 \quad \rightarrow \quad W_{\text{ext}} \Big|_1^2 = -W_c \Big|_1^2 = \Delta E_p \Big|_1^2 \quad [59]$$

El treball fet per cada força exterior F només depèn de si mateixa i del camí recorregut pel seu punt d'aplicació. Per a calcular-lo, es considera que sense les forces exteriors el cos es troba en equilibri i que és de comportament lineal de manera que la força $F(z)$ és proporcional a la deflexió a partir de la posició d'equilibri, en particular a la deflexió z en la direcció de la força, $F(z) = k z$. Així el treball fet per la força $F(z)$ fins arribar al valor F quan el seu punt d'aplicació s'ha desplaçat z és:

$$W_{\text{ext}} \Big|_1^2 = \int_1^2 k z \, dz = \frac{1}{2} (k z) z = \frac{1}{2} F z \quad [60]$$

En resum doncs, l'energia potencial interna d'un cos que s'ha deformat per l'acció d'un conjunt de forces F_i que s'han desplaçat z_i i prenent com a referència la seva posició d'equilibri és:

$$E_p = \sum_i \frac{1}{2} F_i z_i \quad [61]$$

La biga de la figura 17 està articulada en els seus extrems, és de longitud l i rigidesa a flexió EI . A una distància a de l'extrem esquerre hi recolza un bloc de massa m que es considera una càrrega puntual a causa de la qual la deflexió z de la biga en funció d' x , corba elàstica de la biga, és:



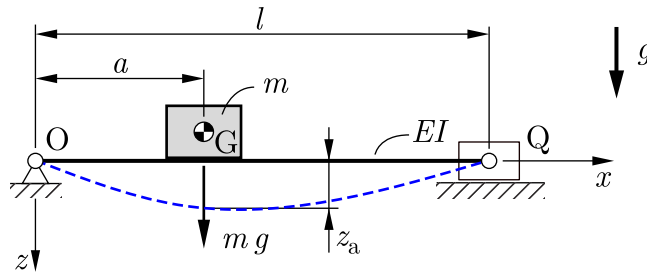


Fig. 17 Biga articulada en els seus extrems.

$$z(x) = \begin{cases} \frac{m g (l-a)x}{6 EI l} (2la - a^2 - x^2) & x \leq a \\ \frac{m g a (l-x)}{6 EI l} (2lx - a^2 - x^2) & x \geq a \end{cases} \quad [62]$$

La deflexió de la biga a $x = a$ és:

$$z_a = \frac{m g (l-a)^2 a^2}{3 EI l} \quad [63]$$

L'energia potencial interna de la biga emmagatzemada a causa de la deformació produïda pel pes del bloc, expressions 60 i 61, és doncs:

$$E_p = \frac{1}{2} F z = \frac{1}{2} m g z_a = \frac{1}{2} m g \frac{m g (l-a)^2 a^2}{3 EI l} \quad [64]$$

$$\text{De l'expressió [63]} \quad \rightarrow \quad m g = \frac{3 EI l}{(l-a)^2 a^2} z_a \quad \rightarrow \quad E_p = \frac{1}{2} \frac{3 EI l}{(l-a)^2 a^2} z_a^2$$

Si es vol trobar la primera freqüència pròpia del sistema de la figura 17 cal trobar l'energia potencial, interna més la del pes, i la inèrcia reduïda per poder aplicar l'expressió 42. En un primer estudi, es negligeix la inèrcia de la biga i, per a aplicar el mètode de Rayleigh, s'escull la forma modal definida per la deformada estàtica de la biga amb la càrrega concentrada, expressió 62, i la coordenada modal $z_a(t)$.

L'energia cinètica és únicament la del bloc, $E_c = (1/2) m \dot{z}_a^2(t)$, i per tant la inèrcia reduïda és simplement m .



L'energia potencial és la suma de l'energia potencial interna, expressió 64, més la del pes del bloc que és $-m g z_a(t)$, si es pren la posició d'equilibri de la biga com la de referència.

$$E_p = \frac{1}{2} \frac{3 E I l}{(l-a)^2 a^2} z_a^2(t) - m g z_a(t); \quad \left. \frac{d^2 E_p}{dz_a^2} \right|_{z_a \text{ eq}} = \frac{3 E I l}{(l-a)^2 a^2} \quad [65]$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\left. \frac{1}{m} \frac{d^2 E_p}{dz_a^2} \right|_{z_a \text{ eq}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{m} \frac{3 E I l}{(l-a)^2 a^2}}$$

És interessant observar que el pes del bloc, no la massa, no intervé en el valor de la freqüència ja que no apareix en la derivada segona de l'energia potencial. La interpretació física rau en el fet que en ser una força constant i actuar de manera invariable amb el temps pot modificar la posició d'equilibri, com realment succeeix, però no fa variar la rigidesa de la biga, costa igual deformar-la estàticament a partir de la posició d'equilibri amb la força o sense.

En un nou estudi de la biga de la figura 17, es vol tenir en compte la seva massa i es considera que és uniforme i de densitat lineal ρ . La deformació de la biga causada pel seu propi pes se suposa molt inferior a la causada pel pes del bloc i, per això, per al càlcul de l'energia cinètica i de l'energia potencial s'escullen les mateixes forma i coordenada modals que en l'aproximació anterior. El moviment vertical de les seccions és:

$$z(x, t) = \frac{z(x)}{z_a} z_a(t)$$

$$z(x, t) = \begin{cases} \frac{x}{2(l-a)a^2} (2la - a^2 - x^2) z_a(t) = w_e(x) z_a(t) & x \leq a \\ \frac{(l-x)}{2(l-a)^2 a} (2lx - a^2 - x^2) z_a(t) = w_d(x) z_a(t) & x \geq a \end{cases} \quad [66]$$

En el càlcul de l'energia cinètica, es negligeix la inèrcia a la rotació de les seccions de la biga i se suposa que només es traslladen en sentit vertical.



$$\begin{aligned}
E_c &= \frac{1}{2} m \dot{z}_a^2(t) + \int_0^l \frac{1}{2} dm \dot{z}^2(x,t) = \frac{1}{2} m \dot{z}_a^2(t) + \frac{1}{2} \int_0^l \rho dx w^2(x) \dot{z}_a^2(t) = \\
&\frac{1}{2} m \dot{z}_a^2(t) + \frac{1}{2} \left(\rho \int_0^l w^2(x) dx \right) \dot{z}_a^2(t) \quad \rightarrow \quad m_{\text{red}} = m + \rho \int_0^l w^2(x) dx \quad [67] \\
m_{\text{red}} &= m + \frac{2 + 4c - c^2 - 6c^3 + 3c^4}{105(1-c)^2 c^2} \rho l \quad \text{amb} \quad c = a/l
\end{aligned}$$

Com a exemple, per a $c = 0,5$ la inèrcia de la biga està reduïda al moviment del seu centre i val 0,4857 vegades la massa real ρl de la biga.

En el càlcul de l'energia potencial interna de la biga, es negligeix el treball fet per les forces tallants i s'utilitza l'expressió que es troba a la bibliografia per a les bigues.

$$\begin{aligned}
E_p &= \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right)^2 z_a^2 dx \\
k_{\text{red}} &= \left. \frac{d^2 E_p}{dz_a^2} \right|_{z_a \text{ eq}} = \int_0^l EI \left(\frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{3EI}{(1-c)^2 c^2 l^3} \quad \text{amb} \quad c = a/l \quad [68]
\end{aligned}$$

Aquesta expressió coincideix amb la 65, com ha de ser ja que la deformació de la biga es considera la mateixa. Com a exemple, per a $c = 0,5$ la rigidesa de la biga està reduïda al moviment del seu centre i val $48 EI/l^3$. En resum, tenint en compte que l'energia potencial del pes de la biga i del bloc no intervenen com en el cas anterior, la freqüència pròpia amb les hipòtesis realitzades és:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{\text{red}}}{m_{\text{red}}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3EI}{(1-c)^2 c^2 l^3} \left(m + \frac{2 + 4c - c^2 - 6c^3 + 3c^4}{105(1-c)^2 c^2} \rho l \right)^{-1}}$$

Si $c = 0,5$ i la massa del bloc és nul·la la freqüència pròpia és $f_{01} = 1,5822 \sqrt{(EI)/(\rho l^4)}$.

Si en lloc d'escollir la forma modal associada a la deformació estàtica de la biga amb càrrega puntual s'agafa l'associada a la deformació estàtica de la biga amb càrrega uniformement repartida, aplicant les expressions 67 i 68, es té:



$$z(x, t) = \frac{x^4 - 2lx^3 + l^3x}{(c - 2c^3 + c^4)l^4} z_a(t) = w(x)z_a(t) \quad \text{amb} \quad c = a/l$$

$$m_{\text{red}} = m + \frac{31}{630(c - 2c^3 + c^4)^2} \rho l$$

$$k_{\text{red}} = \frac{24EI}{5(c - 2c^3 + c^4)^2 l^3}$$

Amb $c = 0,5$ la inèrcia reduïda de la biga és ara 0,5039 vegades la massa real ρl de la biga i la rigidesa reduïda és $49,15 EI/l^3$. Si a més la massa del bloc és nul·la la freqüència pròpia és $f_{02} = 1,5719 \sqrt{(EI)/(\rho l^4)}$.

Per tal de veure la precisió dels resultats obtinguts amb les dues formes modals es poden comparar, per a $c = 0,5$ i $m = 0$, amb la freqüència exacta $f_0 = 1,5708 \sqrt{(EI)/(\rho l^4)}$ d'una biga uniforme d'Euler-Bernoulli (les hipòtesis del seu comportament coincideixen amb les preses). La forma modal per a la primera freqüència pròpia d'una biga Euler-Bernoulli és mig sinus.

6.2 Efecte de la massa d'una molla

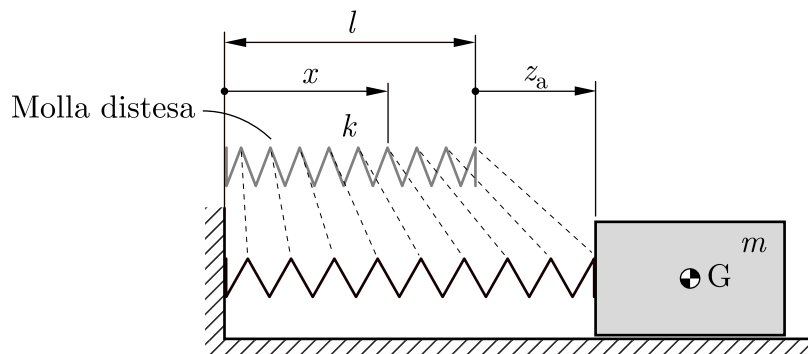


Fig. 18 Sistema massa-molla.

En el sistema de la figura 18, la molla no és de massa negligible i vol estudiar-se'n l'efecte sobre la freqüència pròpia del sistema. La molla és de comportament lineal de constant k , de llargada l i densitat lineal ρ sense tensió.

Per a aplicar el Mètode de Rayleigh, es considera que el desplaçament de cada secció de la molla és proporcional a la distància a l'extrem fix, com ho seria si es deformés a velocitat i acceleració negligibles, estàticament, aplicant una força a l'extrem lliure. Si x és la coordenada que identifica cada secció de la molla, quan està distesa, la forma modal de la molla és:

$$z(x, t) = \frac{x}{l} z_a(t) = w(x) z_a(t) \quad [69]$$

L'energia cinètica, i per tant la massa reduïda, es calcula a partir de la forma modal, expressió 67. L'energia potencial de la molla es calcula directament tenint en compte que la forma modal coincideix amb la deformació produïda per una força aplicada estàticament a l'extrem. Així doncs es té:

$$m_{\text{red}} = m + \rho \int_0^l w^2(x) dx = m + \rho \int_0^l \left(\frac{x}{l}\right)^2 dx = m + \frac{1}{3} \rho l$$

$$E_p = \frac{1}{2} k z_a^2 \quad \rightarrow \quad k_{\text{red}} = k \quad [70]$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{\text{red}}}{m_{\text{red}}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m + \rho l/3}}$$

L'expressió 70 posa de manifest que la inèrcia de la molla reduïda al moviment del seu extrem és un terç de la seva massa ρl , valor que cal afegir a la massa del bloc a l'hora de calcular la freqüència pròpia.

7 Sistemes autònoms no conservatius. Posicions d'equilibri. Linealització

En els sistemes autònoms les forces només són funció de posició i velocitat i el temps no apareix explícitament en l'equació del moviment. Per a determinar-la aplicant el teorema de l'energia en versió diferencial, convé diferenciar la potència de les forces conservatives $-P_c$ i la potència de les forces no conservatives $-P_{nc}$ de manera que es té:

$$\dot{E}_c = P_c + P_{nc} \quad [71]$$



Amb aquesta partició, les expressions 25 i 28 porten a la següent expressió de l'equació del moviment, que complementa l'expressió 38 amb l'efecte de les forces no conservatives:

$$m(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}m_q(q)\dot{q}^2 + \frac{dE_p(q)}{dq} - \frac{P_{nc}}{\dot{q}} = 0 \quad [72]$$

D'aquesta expressió, es dedueix la condició que han de complir les posicions d'equilibri dels sistemes autònoms. Si a l'expressió 72 es fan zero la velocitat i l'acceleració, condició que s'ha de complir en tota posició d'equilibri, es té:

$$\left. \left(\frac{dE_p(q)}{dq} - \frac{P_{nc}}{\dot{q}} \right) \right|_{q_{eq}, 0} = 0 \quad [73]$$

Si la potència de les forces no conservatives és proporcional al quadrat de la velocitat, com és el cas de les resistències passives viscoses o proporcionals a la velocitat, o proporcional a potències superiors el terme P_{nc}/\dot{q} s'anul·la per a $\dot{q} = 0$ i, per tant, les posicions d'equilibri coincideixen amb les del sistema sense les forces no conservatives, expressió 39. Aquest és, per exemple, el cas del sistema de la figura 8 i del sistema de la figura 14 si entre el bloc i les seves guies verticals hi ha frec viscós de coeficient c , ja que aleshores la potència dissipada pel frec és en els dos casos proporcional al quadrat de la velocitat vertical del bloc:

$$P_{\text{dis. frec}} = -c(e \sin(\varphi))^2 \dot{\varphi}^2 \text{ en el sistema de la figura 8 i}$$

$$P_{\text{dis. frec}} = -c(r \cos(\varphi))^2 \dot{\varphi}^2 \text{ en el sistema de la figura 14.}$$

L'equació del moviment genèrica donada per l'expressió 72 es pot linealitzar a l'entorn d'una posició d'equilibri q_{eq} determinada amb l'expressió 73, tal com s'ha fet a l'expressió 40, i recordant que $\mathbf{x}_0 = (q_{eq}, 0, 0)$ i $\varepsilon = q - q_{eq}$ ($\dot{\varepsilon} = \dot{q}$, $\ddot{\varepsilon} = \ddot{q}$) s'obté:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \ddot{q}} \right|_{\mathbf{x}_0} = m(q)|_{\mathbf{x}_0} = m(q_{eq})$$



$$\left. \frac{\partial f}{\partial \dot{q}} \right|_{x_0} = \left(m_q(q) \dot{q} - \frac{\partial (P_{nc}/\dot{q})}{\partial \dot{q}} \right) \Bigg|_{x_0} = - \left. \frac{\partial (P_{nc}/\dot{q})}{\partial \dot{q}} \right|_{q_{eq},0}$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial q} \right|_{x_0} = \left(m_q(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} m_{qq}(q) \dot{q}^2 + \frac{d^2 E_p}{dq^2} - \frac{\partial (P_{nc}/\dot{q})}{\partial q} \right) \Bigg|_{q_{eq},0}$$

$$= \left(\frac{d^2 E_p}{dq^2} - \frac{\partial (P_{nc}/\dot{q})}{\partial q} \right) \Bigg|_{q_{eq},0}$$

$$m(q_{eq}) \ddot{\varepsilon} - \left. \frac{\partial (P_{nc}/\dot{q})}{\partial \dot{q}} \right|_{q_{eq},0} \dot{\varepsilon} + \left(\frac{d^2 E_p}{dq^2} - \frac{\partial (P_{nc}/\dot{q})}{\partial q} \right) \Bigg|_{q_{eq},0} \varepsilon = 0$$

Per comparació amb l'equació del moviment, expressió 76, d'un sistema elemental massa-molla-amortidor, com el de la figura 19, i per a uniformitzar la nomenclatura el coeficient d' $\ddot{\varepsilon}$ és la inèrcia o massa reduïda $-m_{red}$, el coeficient d' $\dot{\varepsilon}$ és l'esmoreïment reduït $-c_{red}$ i el coeficient d' ε és la rigidesa reduïda $-k_{red}$, tot reduït a la coordenada q o a la coordenada ε .

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = 0 \quad \leftrightarrow \quad m_{red} \ddot{\varepsilon} + c_{red} \dot{\varepsilon} + k_{red} \varepsilon = 0$$

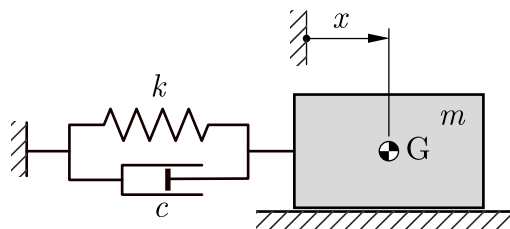


Fig. 19 Sistema elemental massa-molla-amortidor.

Tal com s'ha comentat, $m(q_{eq})$ és sempre positiva ja que prové del càlcul de l'energia cinètica i $\varepsilon(t)$, com a solució que és d'una equació diferencial lineal, és la combinació lineal de dues exponencials:

$$\varepsilon(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$$

on s_1 i s_2 són les arrels de l'equació característica; es prenen els coeficients de l'expressió 76 per facilitar l'escriptura:



$$m s^2 + c s + k = 0 \quad \rightarrow \quad s_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4 k m}}{2 m}$$

Si $k < 0$, s_1 és real i positiva i el sistema és inestable.

Si $k > 0$ i $c > 2\sqrt{k m}$, s_1 i s_2 són reals i negatives i el sistema és estable.

Si $k > 0$ i $0 < c < 2\sqrt{k m}$, s_1 i s_2 són complexos conjugades amb part real negativa i el sistema és estable.

Si $k > 0$, $c < 0$ i $|c| < 2\sqrt{k m}$, s_1 i s_2 són complexos conjugades amb part real positiva i el sistema és inestable.

Si $k = 0$, $c > 0$, $s_1 = 0$ i s_2 és real i negativa i el sistema és estable.

Si $k = 0$, $c < 0$, $s_2 = 0$ i s_1 és real i positiva i el sistema és inestable.

Si $k \geq 0$ i $c = 0$ la solució és l'estudiada per als sistemes conservatius.

Quan les arrels són complexos conjugades, la solució de l'equació del moviment és usual escriure-la:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_p e^{-\zeta \omega_0 t} \cos\left(\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} t + \varphi\right) \quad \text{amb} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{i} \quad \zeta = \frac{c}{2\sqrt{k m}} \quad [77]$$

S'anomena esmorteïment crític a $c_c = 2\sqrt{k m}$ i raó d'esmorteïment del sistema a ζ i de la mateixa manera que ω_0 , o la freqüència pròpia $f_0 = \omega_0 / (2 \pi)$, aquests paràmetres depenen exclusivament de les característiques del sistema.

7.1 Exemple: Sistema autònom no conservatiu 1

En el sistema de la figura 20, el piü P del bloc es mou dins de la ranura de la barra. La molla és de comportament lineal de constant k i està distesa quan $\varphi = 0$. La força de l'amortidor funció de la velocitat relativa entre els seus extrems v és



$F_a = -\text{sgn}(v) \left(2F_0/\pi \right) \arctan(v/v_0)$. L'energia cinètica E_c , l'energia potencial E_p i la potència de les forces no conservatives P_{nc} del sistema són:

$$\begin{cases} E_c = \frac{1}{2} I_O \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2 & \text{amb } x = h \tan(\varphi); \dot{x} = h \sec^2(\varphi) \dot{\varphi} \\ E_p = \frac{1}{2} k x^2 + m_1 g l (1 - \cos(\varphi)) \\ P_{nc} = -\frac{2F_0}{\pi} \arctan\left(\frac{\dot{x}}{v_0}\right) \dot{x} \end{cases}$$

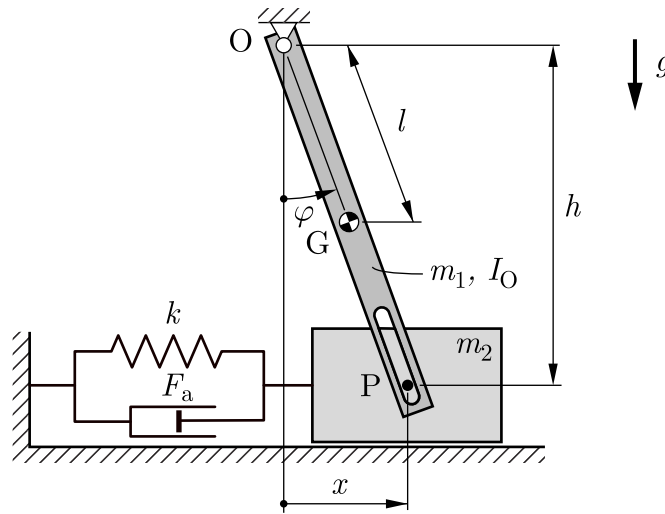


Fig. 20 Sistema autònom no conservatiu.

La posició d'equilibri és:

$$\left. \left(\frac{dE_p(\varphi)}{d\varphi} - \frac{P_{nc}}{\dot{\varphi}} \right) \right|_{\varphi_{eq}, 0} = 0 \rightarrow kh^2 \sec^2(\varphi_{eq}) \tan(\varphi_{eq}) + m_1 gl \sin(\varphi_{eq}) = 0 \rightarrow \varphi_{eq} = 0$$

L'equació del moviment, els paràmetres reduïts i l'equació del moviment linealitzada a l'entorn de la posició d'equilibri són:

$$\left(I_O + m_2 h^2 \sec^4(\varphi) \right) \ddot{\varphi} + 2 m_2 h^2 \sec^4(\varphi) \tan(\varphi) \dot{\varphi}^2 + m_1 gl \sin(\varphi) + kh^2 \sec^2(\varphi) \tan(\varphi) + \frac{2F_0}{v_0} \arctan\left(\frac{h \sec^2(\varphi) \dot{\varphi}}{v_0} \right) h \sec^2(\varphi) = 0$$



$$m_{\text{red}} = m(\varphi_{\text{eq}}) = I_O + m_2 h^2$$

$$c_{\text{red}} = - \left. \frac{\partial (P_{\text{nc}}/\dot{\varphi})}{\partial \dot{\varphi}} \right|_{\varphi_{\text{eq}}, 0} = \frac{2 F_0 h^2}{\pi v_0}$$

$$k_{\text{red}} = \left. \left(\frac{d^2 E_p}{d\varphi^2} - \frac{\partial (P_{\text{nc}}/\dot{\varphi})}{\partial \varphi} \right) \right|_{\varphi_{\text{eq}}, 0} = k h^2 + m_1 g l$$

$$(I_O + m_2 h^2) \ddot{\varphi} + \left(\frac{2 F_0 h^2}{\pi v_0} \right) \dot{\varphi} + (k h^2 + m_1 g l) \varphi = 0$$

7.2 Exemple: Sistema autònom no conservatiu 2

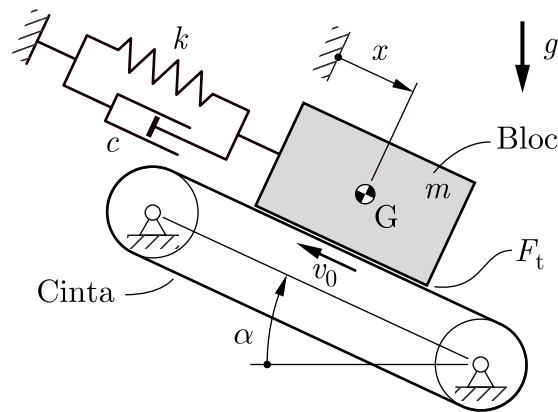


Fig. 21 Bloc sobre una cinta transportadora.

En el sistema de la figura 21, el bloc llisca sobre una cinta transportadora que es mou a velocitat v_0 constant. La molla i l'amortidor són de comportament lineal de constant k i c respectivament. La força tangencial $F_t(v)$ entre la cinta i el bloc és funció de la velocitat de lliscament v entre les superfícies de la cinta i el bloc. Es pren $x = 0$ quan la molla està distesa. Aquest sistema no seria autònom si la velocitat de la cinta fos variable amb el temps ja que aleshores el temps apareixeria explícitament en l'equació del moviment. L'energia cinètica E_c , l'energia potencial E_p i la potència de les forces no conservatives P_{nc} del sistema són:

$$\begin{cases} E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \\ E_p = \frac{1}{2} k x^2 - m g x \sin \alpha \\ P_{\text{nc}} = -c \dot{x}^2 - F_t(v_0 + \dot{x}) \dot{x} \end{cases}$$

La posició d'equilibri és:

$$\left(\frac{d E_p(x)}{d x} - \frac{P_{nc}}{\dot{x}} \right) \Big|_{x_{eq}, 0} = 0 \quad \rightarrow \quad k x_{eq} - m g \sin \alpha + F_t(v_0) = 0 \quad \rightarrow$$

$$x_{eq} = \frac{m g \sin \alpha - F_t(v_0)}{k}$$

L'equació del moviment, els paràmetres reduïts i l'equació del moviment linealitzada a l'entorn de la posició d'equilibri són:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx - m g \sin \alpha + F_t(v_0 + \dot{x}) = 0$$

$$m_{red} = m(x_{eq}) = m$$

$$c_{red} = - \left. \frac{\partial (P_{nc}/\dot{x})}{\partial \dot{x}} \right|_{x_{eq}, 0} = c + \left. \frac{\partial F_t(v_0 + \dot{x})}{\partial \dot{x}} \right|_{x_{eq}, 0} = c + \left. \frac{\partial F_t(v)}{\partial v} \frac{d(v)}{d\dot{x}} \right|_{x_{eq}, 0} =$$

$$= c + \left. \frac{\partial F_t(v)}{\partial v} \right|_{v_0}$$

$$k_{red} = \left(\frac{d^2 E_p}{d x^2} - \frac{\partial (P_{nc}/\dot{x})}{\partial x} \right) \Big|_{x_{eq}, 0} = k$$

$$m\ddot{\varepsilon} + \left(c + \left. \frac{\partial F_t(v)}{\partial v} \right|_{v_0} \right) \dot{\varepsilon} + k \varepsilon = 0 \quad \text{amb} \quad \varepsilon = x - x_{eq}$$

És interessant observar que en la posició d'equilibri el sistema pot ser estable o no segons l'evolució de la força tangencial al voltant de v_0 , si $\left. \frac{\partial F_t(v)}{\partial v} \right|_{v_0} < -c$ és inestable i, en cas contrari, és estable. Quan el sistema és inestable i el seu moviment queda descrit per l'expressió 77, es diu que és autoexcitat, o que s'autoexcita, ja que sense la intervenció explícita d'una força alternativa el seu moviment oscil·latori s'inicia i augmenta, almenys mentre el comportament del sistema quedi correctament descrit per l'equació del moviment linealitzada. Si, com és usual, el sistema no és estrictament lineal l'equació linealitzada deixa de ser vàlida a mesura que augmenta l'amplitud de la vibració. Això fa que l'equació linealitzada permeti estudiar la possibilitat que un sistema s'autoexciti i com és l'inici de l'autoexcitació, però no fins a



quin nivell d'amplitud de vibració arribarà, que en general és acotat i correspon al que s'anomena un cicle límit.

A la figura 22, es mostra el moviment del bloc del sistema de la figura 21 per a diferents velocitats de la cinta. Els paràmetres del sistema i la força tangencial són:

$$m = 2 \text{ kg}; k = 500 \text{ N/m}; c = 2 \text{ N/(m/s)}; \alpha = 25^\circ$$

$$F_t(v) = \begin{cases} (10v^2 - 8v + 4) \text{ N} & v > 0 \\ -(10(-v)^2 - 8(-v) + 4) \text{ N} & v < 0 \end{cases}$$

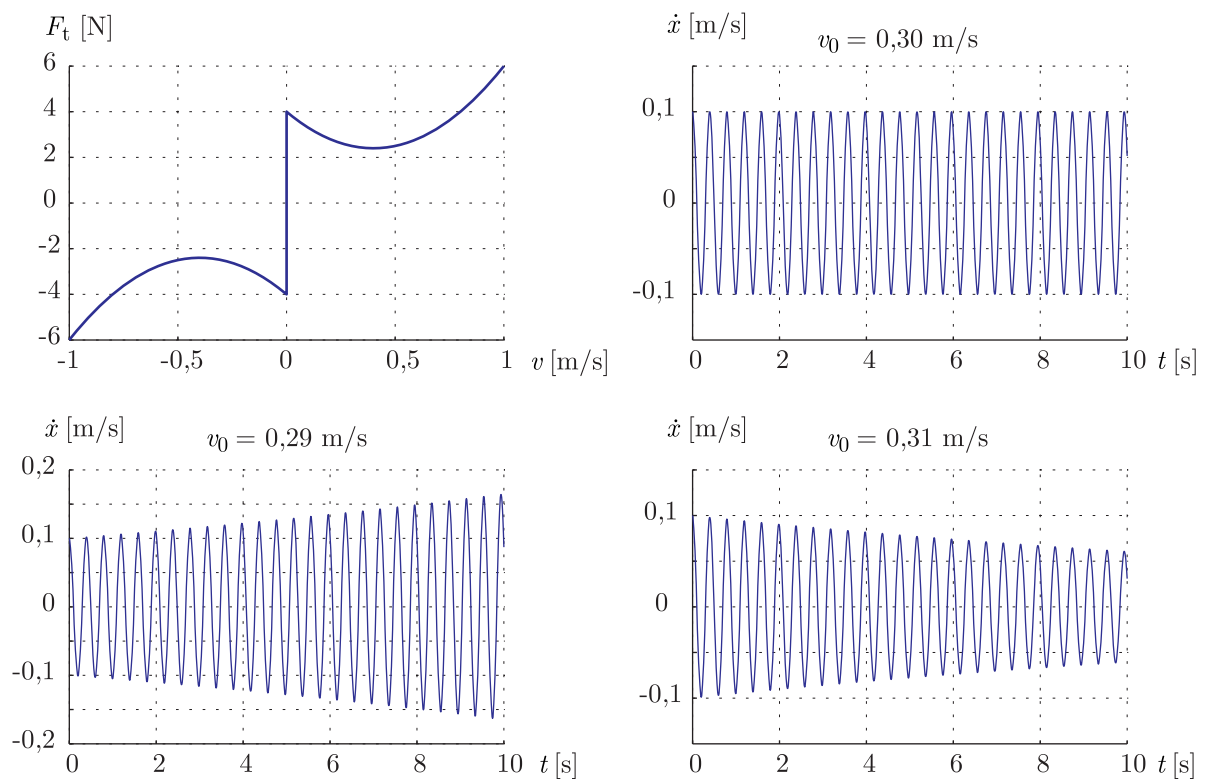


Fig. 22 Força tangencial i moviment del bloc de la figura 21.

La força tangencial presenta un primer tram en el que predomina el frec sec, i per tant disminueix en augmentar la velocitat de lliscament, i un segon tram en el que predomina el frec viscos, i per tant creix amb la velocitat de lliscament. S'han pres les condicions inicials següents: $x_0 = x_{eq}$ i $\dot{x}_0 = 0,1 \text{ m/s}$.

S'observa que per a $v_0 = 0,3 \text{ m/s}$ la posició d'equilibri és críticament estable, això és causat perquè $\left. \frac{\partial F_t(v)}{\partial v} \right|_{v_0} = -c$ i per tant l'esmoreïment reduït del sistema lineal



litzat és nul. Per a $v_0 = 0,31$ m/s la posició d'equilibri és estable i per a $v_0 = 0,29$ m/s la posició d'equilibri és inestable i el sistema és autoexcitat. La petita diferència d'aquestes velocitats posa de manifest que l'autoexcitació d'un sistema pot dependre de petites variacions dels seus paràmetres; aquest és el cas, per exemple, que es presenta quan una persona no experta intenta fer sonar instruments musicals de vent i de corda fregada, que basen el seu funcionament en l'autoexcitació.

A la figura 23, es presenta amb més detall el moviment del bloc per a $v_0 = 0,29$ m/s. S'observa clarament el comportament no lineal del sistema ja que si fos lineal l'amplitud del moviment aniria creixent –els moviments dels sistemes lineals queden descrits per funcions exponencials i si són creixents ho són sempre més– i no deixaria de créixer com realment succeeix. L'amplitud de la velocitat de vibració a partir aproximadament dels 20 s es manté en uns 0,3 m/s; aquest valor es justifica pel fet que si se supera apareix un interval, que abans no existia, en el qual la força tangencial de frec és oposada a la velocitat del bloc \dot{x} i per tant fa un treball negatiu i el frena. El desplaçament presenta òbviament un comportament anàleg a la velocitat i oscil·la al voltant de la posició d'equilibri que és $x_{eq} = 11,5$ mm. En aquesta mateixa figura es mostra la trajectòria del sistema en el pla de fases, representació paramètrica conjunta de la posició i la velocitat en funció del temps com a paràmetre, en la qual es posa clarament de manifest el cicle límit al que arriba el sistema.

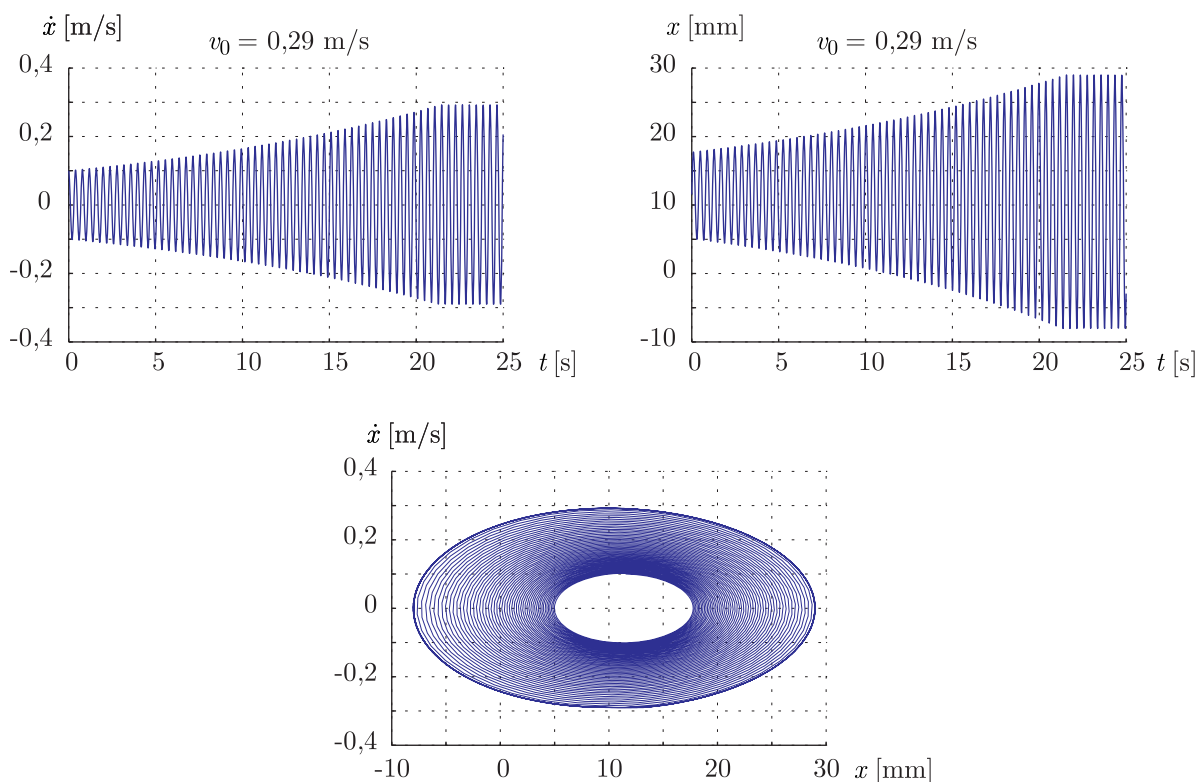


Fig. 23 Vibració autoexcitada i cicle límit del bloc de la figura 21.



El pla de fases és un cas particular per a sistemes d'un grau de llibertat de l'espai d'estat, espai puntual de dimensió $2 \cdot n$ graus de llibertat on cada punt representa un possible estat del sistema, definit per la seva posició i velocitat.

8 Sistemes no autònoms

Són no autònoms els sistemes amb motors i/o actuadors, ja siguin interns, o que actuen entre els seus elements i l'exterior, o que modifiquen l'entorn amb el qual interactuen els sistemes, i que fan que l'equació del moviment depengui explícitament del temps, $h(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) = 0$. A causa de la multitud de disposicions dels actuadors i dels motors i de les funcions que els governen, l'equació del moviment pot dependre de formes molt diverses del temps. La situació més senzilla, que descriu prou bé molts sistemes reals i que constitueix la base de l'estudi de les vibracions forçades o excitades, és aquella en la qual es pot fer una separació de variables de manera que:

$$h(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) = f(q, \dot{q}, \ddot{q}) - e(t) = 0 \quad [78]$$

El terme funció del temps $e(t)$ s'anomena excitació del sistema.

En els sistemes no autònoms, en principi, deixen de tenir sentit les posicions d'equilibri tal com s'han definit per als sistemes autònoms ja que en una posició amb velocitat nul·la l'acceleració pot o no ser nul·la segons l'instant. Sovint quan es pot fer la separació de variables de l'expressió 78 es fa referència a les posicions d'equilibri quan l'excitació és nul·la, $e(t) = 0$, i és al voltant d'aquestes posicions que si convé es linealitzava la funció $f(q, \dot{q}, \ddot{q})$. La linealització d' $e(t)$ o d' $h(q, \dot{q}, \ddot{q}, t)$ en la variable t no té sentit a causa del caràcter monòton creixent del temps t .

8.1 Excitació per força

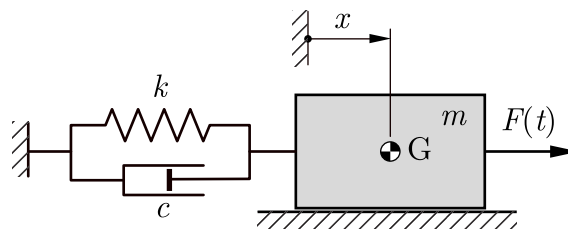


Fig. 24 Sistema massa-molla-amortidor excitat per força.

A la figura 24, es mostra el sistema elemental massa-molla-amortidor no autònom en el qual òbviament la separació de variables de l'expressió 78 és aplicable. És el sistema clàssic excitat per una força exterior funció del temps $F(t)$. Si la molla està distesa per a $x = 0$ l'equació del moviment, que es pot trobar simplement aplicant el teorema de la quantitat de moviment al bloc, és:

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = F(t) \quad [79]$$

8.2 Excitació sísmica o per la base

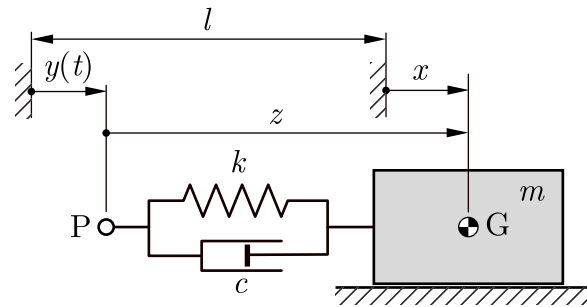


Fig. 25 Sistema massa-molla-amortidor excitat a través d'un element elàstic.

El sistema de la figura 25 és també el sistema elemental massa-molla-amortidor excitat ara pel moviment $y(t)$ de l'extrem P del conjunt molla-amortidor, que pot ser representatiu d'un element elàstic. La molla està distesa per a $x = 0$ i $y = 0$. Si bé l'equació del moviment es pot trobar, també, de manera simple aplicant el teorema de la quantitat de moviment al bloc és interessant trobar-la aplicant el teorema de l'energia, per exemple fent ús de l'expressió 72. Per fer-ho cal decidir si l'extrem P del conjunt molla-amortidor forma part o no del sistema.

Si l'extrem P no forma part del sistema la força de la molla sobre el bloc és exterior i no és conservativa, el seu treball depèn del moviment de P, i es té:

$$\begin{cases} E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \\ E_p = 0 \\ P_{nc} = -(k(x - y) + c(\dot{x} - \dot{y})) \dot{x} \end{cases}$$

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = c \dot{y}(t) + k y(t)$$



Si l'extrem P forma part del sistema la força de la molla és interior i conservativa però ara cal tenir en compte també la força exterior F_{ext} que actua sobre l'extrem P. La suma de forces que actuen sobre aquest extrem, l'exterior, la de la molla i la de l'amortidor, és zero i per tant $F_{\text{ext}} = -k(x - y) - c(\dot{x} - \dot{y})$. En resum, es té:

$$\begin{cases} E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \\ E_p = \frac{1}{2} k(x - y)^2 \quad \text{amb } E_p = 0 \text{ quan } x = 0 \text{ i } y = 0 \\ P_{\text{nc}} = F_{\text{ext}}\dot{y} - c(\dot{x} - \dot{y})(\dot{x} - \dot{y}) = (-k(x - y) - c(\dot{x} - \dot{y}))\dot{y} - c(\dot{x} - \dot{y})(\dot{x} - \dot{y}) = \\ \quad -k(x - y)\dot{y} - c(\dot{x} - \dot{y})\dot{x} \end{cases}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{y}(t) + ky(t)$$

Per a definir la posició del bloc, en lloc de la coordenada absoluta x , es pot utilitzar la coordenada relativa z que indica directament la deformació de la molla i de l'amortidor. L'equació del moviment amb aquesta coordenada es pot trobar, sense fer un canvi de variables a l'equació ja trobada, aplicant el teorema de la quantitat de moviment al bloc en la referència no galileana que es trasllada amb el punt P. En aquesta referència cal tenir en compte la força d'inèrcia d'arrossegament $\mathcal{F}_{\text{arr}} = -m\ddot{y}(t)$ de manera que es té:

$$m\ddot{z} = -c\dot{z} - kz + \mathcal{F}_{\text{arr}}; \quad m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{y}(t)$$

També es pot aplicar el teorema de l'energia a la referència no galileana citada, si bé aleshores cal incloure la força d'inèrcia com força no conservativa. En aquest cas si el punt P no es considera part del sistema es retroba l'equació anterior amb:

$$\begin{cases} E_c = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 \\ E_p = 0 \\ P_{\text{nc}} = (-kz - c\dot{z} + \mathcal{F}_{\text{arr}})\dot{z} \end{cases}$$

En la referència no galileana on el punt P és fix i si es considera que aquest forma part del sistema cal tenir en compte, tal com ja s'ha dit, la força exterior F_{ext} però ara la seva potència és nul·la ja que està aplicada a un punt de velocitat nul·la a la referència i per tant es té:



$$\begin{cases} E_c = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 \\ E_p = \frac{1}{2} k z^2 \\ P_{nc} = (-c \dot{z} + \mathcal{F}_{arr}) \dot{z} \end{cases}$$

L'aplicació del teorema de l'energia utilitzant la coordenada relativa z i en la referència d'estudi, que en tot moment s'ha suposat galileana resulta un xic més laboriós, si el punt P no forma part del sistema:

$$\begin{cases} E_c = \frac{1}{2} m (\dot{z} + \dot{y})^2 \\ E_p = 0 \\ P_{nc} = -k z (\dot{z} + \dot{y}) - c \dot{z} (\dot{z} + \dot{y}) \end{cases}$$

$$(m(\ddot{z} + \ddot{y}) + c\dot{z} + kz)(\dot{z} + \dot{y}) = 0 \quad \rightarrow \quad m(\ddot{z} + \ddot{y}) + c\dot{z} + kz = 0$$

La figura 26 és una nova representació de la suspensió de la figura 9 que inclou un element esmorteïdor i on s'inclou un actuator que fa la mateixa feina que el perfil de la carretera.

En els dos exemples presentats en aquest apartat, es posa de manifest que el moviment de la base o suport del sistema és la causa de la vibració d'aquest i això justifica el nom d'excitació sísmica o per la base.

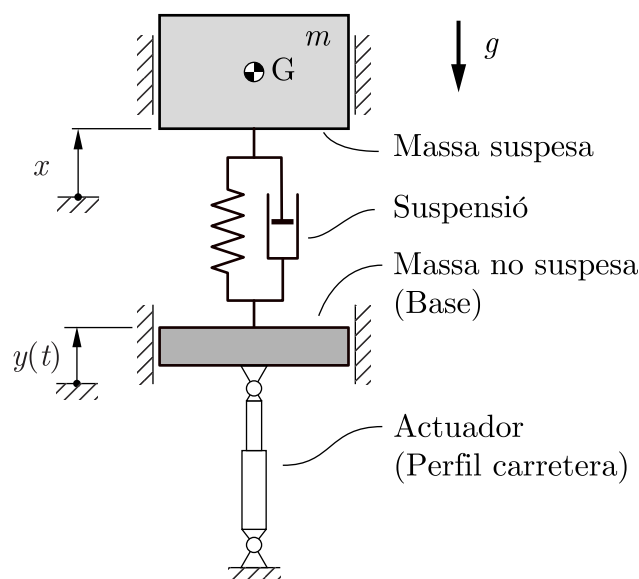


Fig. 26 Sistema massa-molla-amortidor excitat per la base.



Si bé en l'exemple de la figura 25 no queda del tot explícit que, quan P forma part del sistema, de fet es tracta d'un sistema de dos graus de llibertat, o dues coordenades independents, sí que hi queda en el cas de la suspensió de la figura 26 en el qual es necessiten les dues coordenades x i y per a definir la seva configuració. La coordenada x posiciona la massa suspesa del vehicle i és lliure, la seva evolució temporal no està imposada directament i depèn de la dinàmica del sistema. La coordenada y posiciona la massa no suspesa i és forçada, la seva evolució temporal està imposada per l'actuador. Atenent a aquests dos tipus de coordenades és usual parlar de graus de llibertat lliures i forçats.

El fet de ser sistemes de dos graus de llibertat fa que la simple aplicació del teorema de l'energia en la referència d'estudi no necessàriament doni, directament, l'equació del moviment, com s'ha vist en l'exemple de la figura 25 quan P forma part del sistema i cal trobar primer la força exterior F_{ext} fent zero la suma de forces sobre P. Formalment, poden ser tractats com a sistemes d'un grau de llibertat en la referència solidària al suport o base. Si com és usual la referència d'estudi es considera galileana aquesta només ho seria si el suport tingués un moviment de translació rectilínia amb velocitat constant; en tot altre cas, cal tenir en compte les forces d'inèrcia – d'arrossegament i de Coriolis. En aquesta referència, l'aplicació del teorema de l'energia dona directament l'equació del moviment ja que la potència en ella de la força o moment que l'actuador fa sobre la base és nul·la.

8.3 Excitació sísmica d'un pèndol

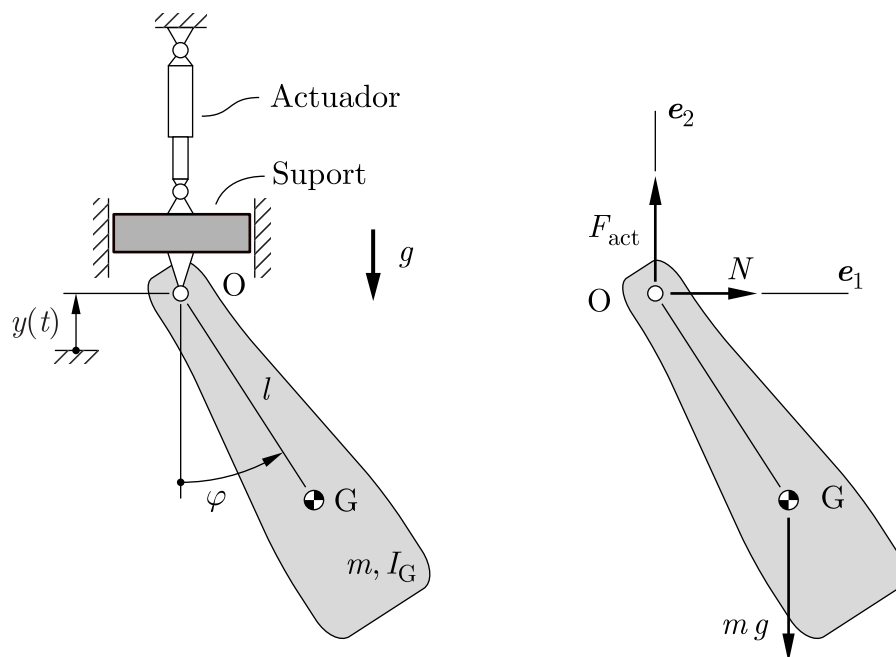


Fig. 27 Pèndol amb articulació mòbil i diagrama de cos lliure.

A la figura 27, es mostra un pèndol l'articulació O del qual està sotmesa a un moviment vertical $y(t)$. L'equació del moviment es pot determinar utilitzant els teoremes vectorials, el mètode de les potències virtuals o el teorema de l'energia. Com la suspensió de la figura 26 és un sistema amb un grau de llibertat lliure i un de forçat.

En el desenvolupament d'aquest apartat els vectors s'expressen en la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ indicada a la figura i la referència on els elements fixos estan indicats amb un ratllat inclinat se suposa galileana. En aquesta referència, l'acceleració del centre d'inèrcia G és:

$$\mathbf{a}(G) = \begin{bmatrix} l \cos(\varphi) \ddot{\varphi} - l \sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 \\ l \sin(\varphi) \ddot{\varphi} + l \cos(\varphi) \dot{\varphi}^2 + \ddot{y} \end{bmatrix}$$

Per a obtenir l'equació del moviment mitjançant els teoremes vectorials, en tractar-se d'un sistema amb moviment pla cal aplicar el teorema de la quantitat de moviment en el pla 1-2 i el teorema del moment cinètic en la direcció 3:

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{F}_{\text{ext}} &= m \mathbf{a}(G) \\ \sum \mathbf{M}_{\text{ext}}(G) \Big|_3 &= I_G \ddot{\varphi} \end{aligned}$$

D'aquestes expressions, s'eliminen la força de l'actuador F_{act} i la força normal d'enllaç N i s'obté l'equació del moviment:

$$(I_G + ml^2) \ddot{\varphi} + ml(g + \ddot{y}(t)) \sin(\varphi) = 0 \quad [80]$$

Alternativament, i de manera més eficient, es pot utilitzar l'expressió de la suma de moments exteriors respecte a un punt qualsevol, en aquest cas O ja que així les forces exteriors no conegudes no donen moment respecte a aquest punt i per tant l'expressió que s'obté és directament l'equació del moviment:

$$\sum \mathbf{M}_{\text{ext}}(O) \Big|_3 = I_G \ddot{\varphi} + (\mathbf{OG} \times m \mathbf{a}(G)) \Big|_3$$

Per a obtenir l'equació del moviment mitjançant el mètode de les potències virtuals $-\sum P^* = 0$, cal en primer lloc determinar la força d'inèrcia \mathcal{F}_1 –resultant de les forces d'inèrcia– i el moment d'inèrcia $\mathcal{M}_1(G)$ –moment resultant de les forces



d'inèrcia– de d'Alembert del pèndol. En tractar-se de moviment pla, la força d'inèrcia està continguda en el pla del moviment i per a trobar l'equació del moviment, i les forces contingudes en el pla del moviment, cal només fer atenció al component del moment d'inèrcia perpendicular a aquest pla.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_i &= -m \mathbf{a}(G) \\ \mathcal{M}_i(\mathbf{G})\Big|_3 &= -I_G \ddot{\varphi}\end{aligned}$$

A continuació, cal definir els moviments virtuals que s'utilitzaran. Com que en el resultat no es vol que apareguin forces d'enllaç, els moviments virtuals han de ser compatibles amb tots els enllaços del sistema i, per tant, de fet són equivalents a possibles moviments reals del sistema. En el pèndol de la figura 27, hi ha dos d'aquests moviments independents que es poden definir per la variació virtual de només una o altra de les coordenades emprades; així doncs es tenen els moviments virtuals:

$\dot{y}^* \neq 0; \dot{\varphi}^* = 0$, associat a una translació vertical del sistema.

$\dot{y}^* = 0; \dot{\varphi}^* \neq 0$, associat al moviment del pèndol amb l'articulació fixa.

Si s'escull el segon moviment virtual, en fer la suma de totes les potències virtuals la força de l'actuador F_{act} no apareix, el seu punt d'aplicació té velocitat virtual nul·la, i per tant l'expressió que s'obté és l'equació del moviment.

$$\begin{aligned}\sum P^* &= \mathcal{F}_i \cdot \mathbf{v}^*(G) + \mathcal{M}_i(\mathbf{G})\Big|_3 \cdot \dot{\varphi}^* + m \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}^*(G) = 0 \\ \text{amb } \mathbf{v}^*(G) &= \begin{Bmatrix} l \cos(\varphi) \\ l \sin(\varphi) \end{Bmatrix} \dot{\varphi}^*\end{aligned}$$

Per a obtenir l'equació del moviment mitjançant el teorema de l'energia, és recomanable, tal com s'ha vist en exemples anteriors, utilitzar la referència no galileana fixa al suport mòbil i tenir en compte la força d'inèrcia d'arrossegament que li pertoca $\mathcal{F}_{\text{arr}} = -m \ddot{y}(t)$. L'energia cinètica, l'energia potencial i la potència de les forces no conservatives és:

$$\begin{cases} E_c = \frac{1}{2} (I_G + m l^2) \dot{\varphi}^2 \\ E_p = m g l (1 - \cos(\varphi)) \quad \text{amb } E_p = 0 \text{ quan } \varphi = 0 \\ P_{\text{nc}} = \mathcal{F}_{\text{arr}} \cdot \mathbf{v}(G) = -m \ddot{y}(t) l \sin(\varphi) \dot{\varphi} \end{cases}$$



Cal notar la semblança dels dos mètodes anteriors, de les potències virtuals i de l'energia en versió diferencial. De fet, l'aplicació del teorema de l'energia en versió diferencial és un balanç de potències com ho és el mètode de les potències virtuals i el moviment virtual proposat, $\dot{y}^* = 0$ $\dot{\varphi}^* \neq 0$, coincideix amb el moviment real a la referència no galileana proposada. Per altra banda, el terme en \ddot{y} a l'acceleració de G, que en el mètode de les potències virtuals apareix directament en el càlcul de l'acceleració en la referència galileana, en el teorema de l'energia apareix com a addicional a causa de la força d'inèrcia d'arrossegament.

De l'equació del moviment, expressió 80, es veu que les posicions d'equilibri en la referència solidària al suport són les mateixes tant si el suport es mou verticalment com si no.

$$\varphi_{\text{eq}} = n\pi \text{ amb } n \in \mathbb{Z}$$

Aquesta equació es pot linealitzar per a $(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi})$ al voltant de les posicions d'equilibri amb $(\varphi_{\text{eq}}, 0, 0)$ i es té:

$$\text{Per a } \varphi_{\text{eq}} = 0 \rightarrow (I_G + ml^2)\ddot{\varphi} + ml(g + \ddot{y}(t))\varphi = 0 \quad [81]$$

$$\text{Per a } \varphi_{\text{eq}} = \pi \rightarrow (I_G + ml^2)\ddot{\varepsilon} - ml(g + \ddot{y}(t))\varepsilon = 0 \quad \text{amb } \varepsilon = \varphi - \pi \quad [82]$$

L'estabilitat d'aquestes posicions d'equilibri depèn del moviment $y(t)$ del suport.

8.4 Sistemes lineals de paràmetres variables

Si es comparen les expressions 81 i 82 amb la 76 s'observa que totes són lineals amb la coordenada associada al grau de llibertat lliure i les seves derivades $-q$, \dot{q} i \ddot{q} . Ara bé, així com a l'expressió 76 els coeficients de q , \dot{q} i \ddot{q} són constants a les expressions 81 i 82 el coeficient de q és funció del temps. Els sistemes, com aquest, amb equació del moviment lineal però amb coeficients funció del temps s'anomenen sistemes lineals de paràmetres variables; un cas particular es dona quan els coeficients són una funció periòdica del temps; aleshores, el sistema es diu de paràmetres periòdics.

Una equació que apareix sovint en l'estudi de vibracions en sistemes amb paràmetres variables és l'equació de Mathieu:



$$\ddot{\varphi} + \left[\lambda + \gamma \cos(\omega t) \right] \varphi = 0 \quad [83]$$

Les equacions 81 i 82 són equacions de Mathieu si el moviment del suport $y(t)$ és harmònic. Aquesta equació també descriu, per exemple, el comportament a flexió d'un eix giratori en el qual la seva rigidesa a flexió varia dues vegades per volta a causa d'una irregularitat en el pla radial, com és la presència d'un claveter o d'una esquerdada. A la figura 28, es mostra el diagrama d'estabilitat de l'equació 83, conegut en alguna bibliografia com diagrama d'Strutt (Lord Rayleigh).

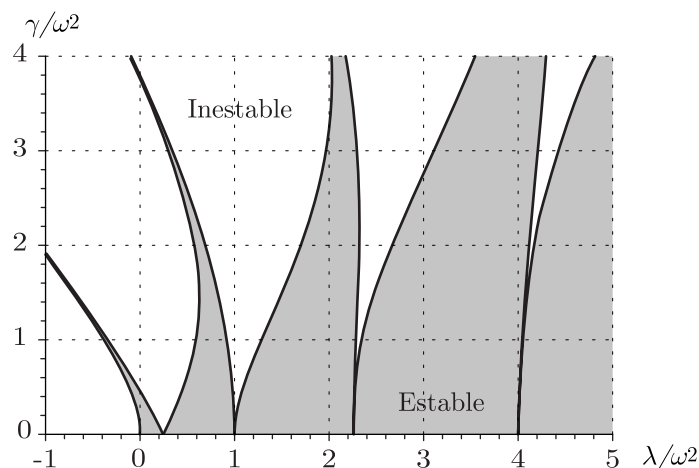


Fig. 28 Diagrama d'estabilitat de l'equació de Mathieu.

Si s'analitza el comportament del pèndol de la figura 27 en posició invertida, expressió 82, en el diagrama d'Strutt s'observa que, en les condicions adequades, aquesta posició pot ser d'equilibri estable si el moviment del suport fa que el pèndol se situï en la zona d'estabilitat per a valors de λ negatius.

8.5 Excitació sísmica en una referència giratòria

A la figura 29, es mostra un bloc de massa m que pot lliscar dins d'una ranura del disc que gira al voltant del seu centre O que és fix. Un actuator garanteix que la velocitat angular del disc és constant, $\dot{\varphi} = \omega$, i es vol estudiar el moviment del bloc relatiu al disc, descrit per la coordenada x . A la mateixa figura, s'inclou el diagrama de cos lliure del bloc a la referència solidària al disc, que és no galileana cosa que fa necessària la inclusió de les forces d'inèrcia d'arrossegament i de Coriolis.

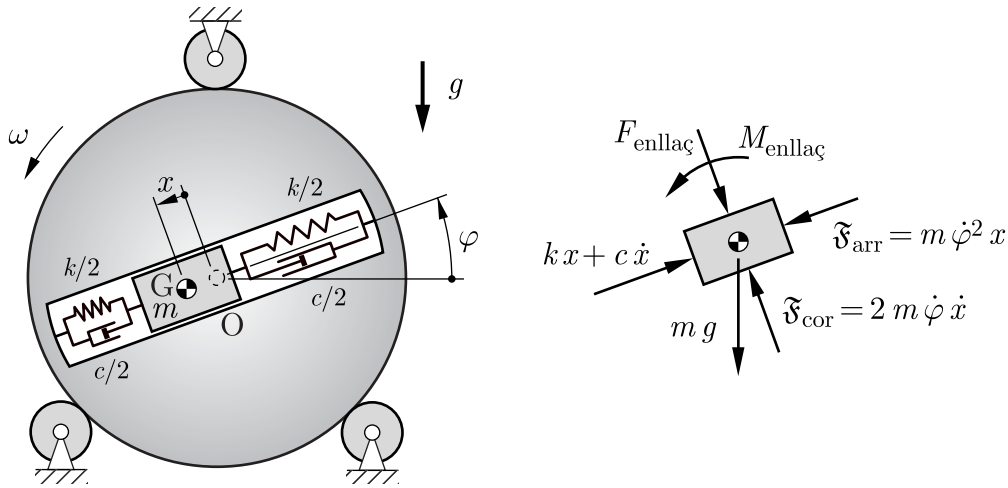


Fig.29 Excitació sísmica en una referència giratòria i diagrama de cos lliure que inclou les forces d'inèrcia d'arrossegament i de Coriolis.

Per a obtenir l'equació del moviment del bloc mitjançant els teoremes vectorials, cal aplicar el teorema de la quantitat de moviment en la direcció de la ranura.

$$\begin{aligned}
 m \ddot{x} &= -(kx + c\dot{x}) + m\dot{\varphi}^2 x + mg \sin(\varphi(t)) \\
 m \ddot{x} + c\dot{x} + (k - m\dot{\varphi}^2)x &= mg \sin(\varphi(t))
 \end{aligned}
 \tag{84}$$

L'equació del moviment es pot obtenir també mitjançant el teorema de l'energia utilitzant la referència no galileana fixa al disc i tenir en compte les forces d'inèrcia, d'arrossegament i de Coriolis, que pertiquen: $\mathcal{F}_{arr} = -m\dot{\varphi}^2 \mathbf{x}$ i $\mathcal{F}_{cor} = -m2\dot{\varphi} \times \dot{\mathbf{x}}$. L'energia cinètica, l'energia potencial i la potència de les forces no conservatives és:

$$\begin{cases}
 E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \\
 E_p = \frac{1}{2} k x^2 \quad \text{amb } E_p = 0 \text{ quan } x = 0 \\
 P_{nc} = \mathcal{F}_{arr} \cdot \mathbf{v}(G) + m g \dot{x} \sin(\varphi(t)) = m \dot{\varphi}^2 x \dot{x} + m g \dot{x} \sin(\varphi(t))
 \end{cases}$$

És interessant observar que la potència de la força d'inèrcia de Coriolis és nul·la ja que és sempre perpendicular a la velocitat relativa.

L'equació del moviment de l'expressió 84 posa de manifest que la rigidesa equivalent $-(k - m\dot{\varphi}^2)$ disminueix amb la velocitat angular de manera que el sistema es fa inestable per a $\dot{\varphi} \geq \sqrt{k/m}$. En l'estudi de rotors –rotodinàmica–, la rigidesa k descriu



la rigidesa a flexió del rotor i a aquesta velocitat angular se l'anomena velocitat crítica. Mentre el sistema és estable, la freqüència d'excitació coincideix amb la velocitat de rotació del disc en voltes per segon.

8.6 Excitació per forces d'inèrcia

Una de les causes més freqüents de generació de vibracions és la presència de forces d'inèrcia no equilibrades en el interior de les màquines i que provenen del moviment dels centres d'inèrcia dels seus elements interns i de la rotació d'aquests a l'entorn de direccions no centrals d'inèrcia. Un exemple és el vibrador dels telèfons mòbils. A la figura 30, es mostra un sistema massa-molla-amortidor format per un bastidor amb una massa al seu interior que es mou accionada per un actuator també intern.

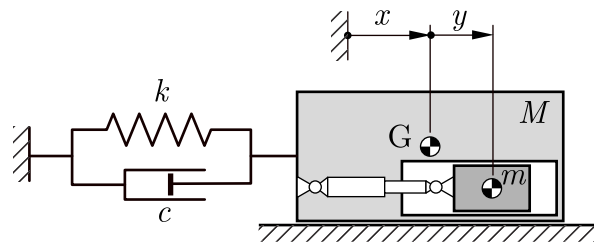


Fig.30 Sistema massa-molla-amortidor excitat per una força d'inèrcia.

L'equació del moviment del bastidor es pot trobar com en els casos anteriors amb els teoremes vectorials o amb el teorema de l'energia. Amb el teorema de la quantitat de moviment en direcció horitzontal aplicat al conjunt de les dues masses es té:

$$\begin{aligned} \sum m_i a(G_i) &= \sum F_{\text{exterior}} \quad \rightarrow \quad M \ddot{x} + m(\ddot{x} + \ddot{y}) = -kx - c\dot{x} \\ (M + m)\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= -m\ddot{y}(t) \end{aligned} \quad [85]$$

Si s'aplica el teorema de l'energia apareix la potència de l'actuator que es desconeix i això fa que calgui aplicar el teorema dues vegades. La potència de l'actuator no depèn de la referència on es calculi (cal recordar que és la suma de les potències de les forces en els seus extrems i només depèn de la variació de distància entre ells). Per a tot el sistema i en la referència fixa, el teorema de l'energia en versió diferencial dóna:

$$\begin{cases} E_c = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x} + \dot{y})^2 \\ E_p = \frac{1}{2} k x^2 \quad \text{amb } E_p = 0 \text{ quan } x = 0 \\ P_{nc} = -c \dot{x}^2 + P_{act} \end{cases}$$

$$M \dot{x} \ddot{x} + m (\dot{x} + \dot{y}) (\ddot{x} + \ddot{y}) + k x \dot{x} + c \dot{x}^2 - P_{act} = 0$$

Per al bloc m i l'actuador en la referència fixa al bloc M , que és no galileana, es té:

$$\begin{cases} E_c = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 \\ P_{nc} = P_{act} + \mathcal{F}_{arr} \dot{y} = P_{act} - m \ddot{x} \dot{y} \end{cases}$$

$$m \dot{y} \ddot{y} - P_{act} + m \ddot{x} \dot{y} = 0$$

L'equació del moviment s'obté eliminant la potencia de l'actuador entre les expressions anteriors i dividint per \dot{x} amb la qual cosa es retroba l'expressió 85.

Comparant l'expressió 85 amb la 79, equació del moviment d'un sistema massa-molla-amortidor excitat per una força exterior, es posa de manifest que el sistema de la figura 30 es comporta com un sistema massa-molla-amortidor, de massa igual a la massa de tot el sistema, excitat per una força del mateix valor que la força d'inèrcia de d'Alembert del bloc interior respecte a la referència solidària al bastidor. Per aquesta raó es parla d'excitació per forces d'inèrcia.

8.7 Excitació per forces d'inèrcia de rotors. Desequilibri estàtic

Les forces d'inèrcia solen ser particularment intenses quan són causades per elements que giren respecte a eixos fixos respecte a un bastidor –rotors. Aquest és el cas del cigonyal d'un motor alternatiu de combustió interna. El sistema de la figura 31 és un sistema massa-molla-amortidor format per un bastidor i un rotor desequilibrat –el seu centre d'inèrcia no està sobre l'eix de gir– que accionat per un actuador gira a velocitat angular ω constant. El rotor gira a l'entorn de l'eix que passa pel punt O fix al bastidor i el seu centre d'inèrcia descriu un trajectòria circular de radi e .

De la mateixa manera que per al sistema de la figura 30, aplicant el teorema de la quantitat de moviment en direcció horitzontal s'obté l'equació de moviment del bastidor.



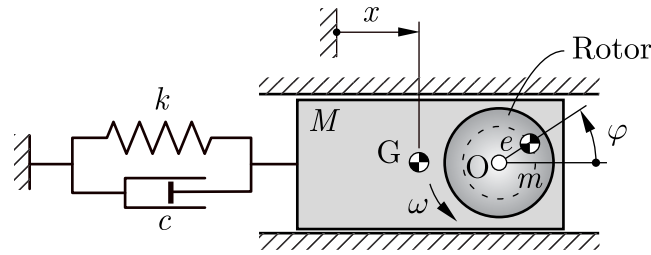


Fig. 31 Sistema massa-molla-amortidor amb un rotor desequilibrat.

$$\sum m_i a(\mathbf{G}_i) = \sum F_{\text{exterioris}} \quad \rightarrow \quad M \ddot{x} + m \left(\ddot{x} - \omega^2 e \cos(\omega t) \right) = -kx - c \dot{x} \quad [86]$$

$$(M + m) \ddot{x} + c \dot{x} + kx = m \omega^2 e \cos(\omega t)$$

En aquest cas, l'excitació és el component horitzontal de la força d'inèrcia causada pel moviment relatiu del rotor que com es pot veure a l'expressió 86 és d'amplitud $m \omega^2 e$ i freqüència igual a la velocitat de rotació en voltes per segon, o si es prefereix la pulsació és igual a la velocitat angular. Al producte $m e$ se'l sol anomenar desequilibri u del rotor. Per tal de valorar l'amplitud d'aquesta excitació, es pot prendre com exemple un rotor amb excentricitat $e = 1 \text{ mm}$ que gira a $n = 3000 \text{ min}^{-1}$; en aquest cas, l'amplitud de l'excitació és 10 vegades el pes del rotor.

$$m e \omega^2 = m \cdot 1 \cdot 10^{-3} \left(\left(\frac{3000}{60} \right) 2 \pi \right)^2 = 98,696 m = 10,06 m g$$

Aquest resultat justifica l'atenció que cal donar, i es dona, a l'equilibrat de rotors –aconseguir que el desequilibri u sigui tan petit com sigui possible, tant per disseny del rotor com experimentalment. Portar el centre d'inèrcia sobre l'eix de rotació s'anomena equilibrar estàticament el rotor. Un exemple és l'equilibrat de les rodes d'un cotxe quan es canvien els pneumàtics per a evitar la vibració de la direcció.

8.8 Excitació per forces d'inèrcia de rotors. Desequilibri dinàmic

Tot i que el centre d'inèrcia d'un rotor estigui sobre el seu eix de rotació, pot generar vibracions ja que si bé en aquest cas la resultant de les forces d'inèrcia és zero no necessàriament ho és el moment resultant d'aquestes forces. Aquest moment no és nul quan l'eix de rotació no és una direcció central d'inèrcia i aleshores el rotor es diu que està desequilibrat dinàmicament.



En el sistema de la figura 32, es mostra un bastidor que pot girar al voltant de l'eix vertical i que disposa d'una molla torsional de comportament lineal de constant k_t que garanteix l'equilibri a $\psi = 0$ quan tot està en repòs. El centre d'inèrcia del bastidor està sobre el seu eix de gir i el seu moment d'inèrcia respecte a aquest eix és I_{Gb} . A l'interior del bastidor, hi ha un rotor que gira amb velocitat angular ω constant. El centre d'inèrcia del rotor es troba a la intersecció dels dos eixos de rotació, està per tant equilibrat estàticament, però la direcció de l'eix de rotació no és una direcció central d'inèrcia, no està equilibrat dinàmicament. El seu tensor central d'inèrcia –tensor d'inèrcia a G– \mathbf{I}_{Gr} en la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ indicada en la figura i solidària al rotor és:

$$\mathbf{I}_{Gr} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & I_{23} \\ 0 & I_{23} & I_3 \end{pmatrix}$$

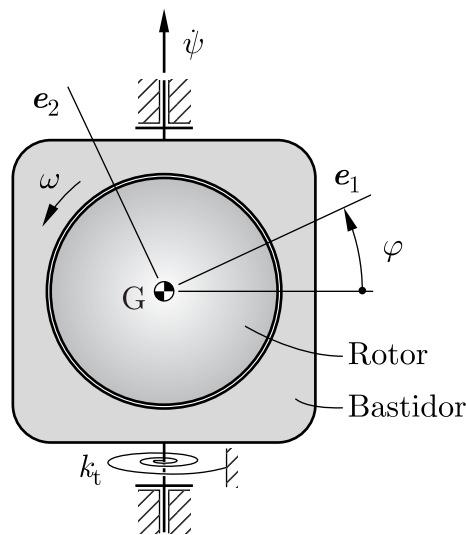


Fig. 32 Sistema amb desequilibri dinàmic.

L'equació del moviment del bastidor es pot trobar a partir del component vertical del teorema del moment cinètic aplicat al conjunt.

Per al rotor en la base vectorial indicada a la figura es té:

$$\mathbf{I}_{Gr} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & I_{23} \\ 0 & I_{23} & I_3 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} \dot{\psi} \sin(\varphi) \\ \dot{\psi} \cos(\varphi) \\ \omega \end{pmatrix}; \quad \mathbf{L}_{Gr} = \mathbf{I}_{Gr} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} I_1 \dot{\psi} \sin(\varphi) \\ I_2 \dot{\psi} \cos(\varphi) + I_{23} \omega \\ I_{23} \dot{\psi} \cos(\varphi) + I_3 \omega \end{pmatrix}$$



$$\dot{\mathbf{L}}_{\text{Gr}} = \left\{ \begin{array}{l} I_1 \ddot{\psi} \sin(\varphi) + I_1 \dot{\psi} \omega \cos(\varphi) + I_{23} \dot{\psi}^2 \cos^2(\varphi) + I_3 \dot{\psi} \omega \cos(\varphi) - I_2 \dot{\psi} \omega \cos(\varphi) - I_{23} \omega^2 \\ I_2 \ddot{\psi} \cos(\varphi) - I_2 \dot{\psi} \omega \sin(\varphi) - I_{23} \dot{\psi}^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) - I_3 \dot{\psi} \omega \sin(\varphi) + I_1 \dot{\psi} \omega \sin(\varphi) \\ I_{23} \ddot{\psi} \cos(\varphi) - I_{23} \dot{\psi} \omega \sin(\varphi) + I_2 \dot{\psi}^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) + I_{23} \dot{\psi} \omega \sin(\varphi) - I_1 \dot{\psi}^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) \end{array} \right\}$$

El component vertical de la variació del moment cinètic del bastidor és:

$$\dot{\mathbf{L}}_{\text{Gb}} \Big|_{\text{vertical}} = I_{\text{Gb}} \ddot{\psi}$$

Igalant els moments exteriors amb la derivada del moment cinètic per al conjunt bastidor més rotor en la direcció de l'eix vertical s'obté:

$$\begin{aligned} & \left(I_1 \sin^2(\varphi) + I_2 \cos^2(\varphi) + I_{\text{Gb}} \right) \ddot{\psi} + 2(I_1 - I_2) \sin(\varphi) \cos(\varphi) \omega \dot{\psi} + k_t \psi = \\ & I_{23} \omega^2 \sin(\varphi) \end{aligned} \quad [87]$$

Si en el rotor $I_1 = I_2 = I_{\text{Gr}}$ l'expressió anterior se simplifica i queda:

$$\left(I_{\text{Gr}} + I_{\text{Gb}} \right) \ddot{\psi} + k_t \psi = I_{23} \omega^2 \sin(\omega t) \quad [88]$$

L'expressió 88 és l'equació del moviment d'un sistema vibratori torsional de moment d'inèrcia respecte a l'eix de gir igual a moment d'inèrcia del conjunt bastidor més rotor i excitat pel fet que l'eix de gir del rotor respecte al bastidor no és direcció principal d'inèrcia, $I_{23} \neq 0$. Cal notar que aquí també l'amplitud de l'excitació depèn del quadrat de la velocitat angular ω del rotor.

8.9 Excitació per forces d'inèrcia. Visió global

En els sistemes de les figures 30, 31 i 32, l'excitació del moviment vibratori del bastidor és causada pel moviment dels elements mòbils del seu interior, fet que es posa de manifest veient el terme independent, funció de t , de l'equació del moviment. És usual que una màquina o artefacte estigui formada per un bastidor, o xassís, a l'interior del qual es mou un únic sòlid, per exemple en un motor elèctric, o un mecanisme amb més o menys elements mòbils, com per exemple el mecanisme de pistó-biela-manovella en un compressor alternatiu.



Per a l'estudi de moltes màquines és habitual considerar la referència fixa al bastidor com a referència d'estudi del moviment del mecanisme. També és habitual estudiar el comportament dinàmic de la màquina en la referència fixa a terra, que es considera galileana. En aquest marc es pot plantejar, per exemple, el teorema de la quantitat de moviment a la referència fixa a terra utilitzant la composició de moviments per a expressar les acceleracions del mecanisme.

$$\sum_{\text{màquina}} \mathbf{F}_{\text{ext}} = \sum_{\text{bastidor}} m \mathbf{a}_{\text{abs}} + \sum_{\text{mecanisme}} m \mathbf{a}_{\text{abs}}$$

$$\sum_{\text{mecanisme}} m \mathbf{a}_{\text{abs}} = \sum_{\text{mecanisme}} m \mathbf{a}_{\text{rel}} + \sum_{\text{mecanisme}} m \mathbf{a}_{\text{arr}} + \sum_{\text{mecanisme}} m \mathbf{a}_{\text{cor}}$$

Recordant que l'acceleració d'arrossegament d'un punt és igual a l'acceleració absoluta del punt si fos fix a la referència relativa es té:

$$\sum_{\substack{\text{màquina} \\ \text{aturada}}} m \mathbf{a}_{\text{abs}} = \sum_{\text{màquina}} \mathbf{F}_{\text{ext}} + \mathfrak{F}_{\text{rel}} + \mathfrak{F}_{\text{cor}} \quad [89]$$

En aquesta expressió, en el primer sumatori es considera que el mecanisme de la màquina està aturat i $\mathfrak{F}_{\text{rel}}$ i $\mathfrak{F}_{\text{cor}}$ són les forces d'inèrcia causades pel moviment relatiu del mecanisme. En definitiva doncs, aquestes forces d'inèrcia es comporten com forces exteriors que poden excitar vibracions.

9 Equacions de Lagrange

Tal com s'ha vist en aplicacions anteriors, el teorema de l'energia, o principi de conservació de l'energia en un sistema mecànic, en versió diferencial permet determinar l'equació del moviment dels sistemes d'un grau de llibertat, ja sigui l'equació general o directament la linealitzada. Quan el sistema té més graus de llibertat és possible continuar utilitzant el teorema de l'energia, com s'ha fet per exemple per a estudiar l'excitació sísmica, aplicant-lo a referències o a subsistemes diferents però com a procediment general no és recomanable. Per als sistemes d' n graus de llibertat, s'utilitzen les equacions de Lagrange que permeten determinar les equacions del moviment ja siguin generals o directament linealitzades. Igual que el teorema de l'energia, es basen en l'energia cinètica, l'energia potencial i el treball o la potència. Si bé estan fonamentalment previstes per a trobar les equacions del moviment també permeten trobar accions d'enllaç. En el cas que alguns graus de llibertat siguin forçats per actuadors,



les equacions del moviment, de fet, serveixen per a trobar les accions, forces o moments, d'aquests.

Utilitzen un formalisme analític estricte, de manera que, les equacions de Lagrange ordinàries només es poden aplicar a sistemes holònoms l'estat mecànic dels quals es descriu mitjançant un conjunt de coordenades generalitzades independents i les seves derivades temporals –velocitats generalitzades–, que en ser el sistema holònom són també independents. Les equacions de Lagrange amb multiplicadors només requereixen que les velocitats generalitzades siguin derivades de les coordenades generalitzades emprades, no requereixen que totes les coordenades i velocitats generalitzades siguin independents.

Les equacions de Lagrange es poden presentar com una versió sistematitzada analíticament del mètode dels treballs o de les potències virtuals, però en aquesta monografia es prefereix fer-ho com una extensió del teorema de l'energia en versió diferencial ja que d'aquesta manera es dona major continuïtat a tot el que s'ha vist per a sistemes d'un grau de llibertat.

9.1 Equacions de Lagrange ordinàries

L'energia cinètica d'un sistema holònom d' n graus de llibertat l'estat mecànic del qual es descriu per mitjà d'un conjunt de coordenades generalitzades independents \mathbf{q} i les seves derivades temporals $\dot{\mathbf{q}}$ és una forma quadràtica de les velocitats generalitzades, com es pot veure de la definició de l'energia cinètica d'un sistema de partícules de massa m_i posicionades pel vector de posició $\mathbf{r}_i(\mathbf{q})$. Per a adaptar-se a la formulació matricial que es fa amb les equacions de Lagrange linealitzades, és adequat prendre que la forma quadràtica sigui simètrica, $m_{ij} = m_{ji}$.

$$E_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i(\mathbf{q})}{\partial q_j} \dot{q}_j \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j m_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j \quad [90]$$

Aquesta energia cinètica és, doncs, una funció de \mathbf{q} i $\dot{\mathbf{q}}$ – $E_c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ – i per al desenvolupament posterior cal expressar la seva derivada temporal en funció de les velocitats generalitzades prescindint de les acceleracions.

$$\dot{E}_c = \sum_i \frac{\partial E_c}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \quad [91]$$



$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} = m_{ii} \dot{q}_i + \sum_{j \neq i} \frac{1}{2} m_{ij} \dot{q}_j \quad \text{Multiplicant per } \dot{q}_i \text{ i sumant per a totes elles}$$

$$\sum_i \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \sum_i \sum_j m_{ij} \dot{q}_j \dot{q}_i = 2 E_c \quad \text{Derivant respecte al temps}$$

$$2 \dot{E}_c = \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \quad [92]$$

Fent la diferència entre les expressions 92 i 91

$$\dot{E}_c = \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial E_c}{\partial q_i} \dot{q}_i = \sum_i \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i \quad [93]$$

Per a aplicar el teorema de l'energia en versió diferencial, cal la potència de les forces que actuen en el sistema. Com s'ha fet en l'estudi dels sistemes d'un grau de llibertat és convenient tractar per separat les forces conservatives de les no conservatives. L'energia potencial del conjunt de forces conservatives és funció únicament de \mathbf{q} $-E_p(\mathbf{q})$ i la potència P_c d'aquestes forces és:

$$P_c = - \frac{d E_p(\mathbf{q})}{dt} = - \sum_i \frac{\partial E_p}{\partial q_i} \dot{q}_i \quad [94]$$

La potència P_{nc} de les forces no conservatives es determina recordant que la velocitat dels punts d'un sistema és una combinació lineal de les velocitats generalitzades i que aquestes forces poden ser funció de posició, velocitat i temps.

$$P_{nc} = \sum_{\text{sistema}} \mathbf{F}_{nc}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \cdot \mathbf{v} = \sum_{\text{sistema}} \mathbf{F}_{nc}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \cdot \left(\sum_i \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{q})}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) =$$

$$\sum_i \left(\sum_{\text{sistema}} \mathbf{F}_{nc}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{q})}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i = \sum_i Q_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \dot{q}_i \quad [95]$$

Els termes $Q_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ són els components de l'anomenada força generalitzada \mathbf{Q} i, conceptualment, coincideixen amb la força reduïda definida en l'estudi dels sistemes d'un grau de llibertat, ja que el seu producte per la velocitat generalitzada \dot{q}_i dona l'aportació de potència del sistema de forces a causa del moviment associat a aquesta



velocitat generalitzada. Si es vol determinar Q_i a partir de la potència amb un moviment on \dot{q}_i sigui diferent de 0 i amb les altres velocitats generalitzades $\dot{q}_{j \neq i}$ nul·les cal tenir la precaució de no anul·lar cap velocitat en l'expressió de les forces. Si bé no és habitual utilitzar-la també es pot definir la força generalitzada de les forces conservatives; a l'expressió 94 es veu que el component i -èsim d'aquesta és $\partial E_p / \partial q_i$.

Utilitzant les expressions 93, 94 i 95 el teorema de l'energia en versió diferencial adopta l'expressió:

$$\sum_i \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} - Q_i \right) \dot{q}_i = 0 \quad [96]$$

Com que les velocitats generalitzades \dot{q}_i són independents, l'expressió 96 només se satisfà si:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} - Q_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad [97]$$

Aquestes són les equacions de Lagrange ordinàries, tantes com graus de llibertat. Sovint, també es presenten amb la força generalitzada escrita a la dreta de la igualtat.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = Q_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

9.2 Sobre l'holonomia

Un sistema és holònom quan el seu nombre de graus de llibertat, nombre de velocitats generalitzades independents, coincideix amb el de coordenades generalitzades independents. Per contra, un sistema és no holònom si té més coordenades generalitzades independents que graus de llibertat. Es pot pensar en els sistemes no holònoms com aquells que no poden arribar directament, sense maniobrar –combinar adequadament les possibilitats de moviment–, a totes les configuracions accessibles. Un vehicle convencional, per exemple, no es pot desplaçar transversalment però pot arribar a una configuració que correspongui a una translació transversal si fa maniobres.



Si la descripció de totes les restriccions imposades per tots els enllaços d'un sistema es pot fer des del punt de vista geomètric aleshores de les equacions d'enllaç geomètriques, entre coordenades generalitzades, se'n poden obtenir, per derivació temporal, les equacions d'enllaç cinemàtiques, entre velocitats generalitzades, i per tant se n'obté el mateix nombre d'unes i altres. Sempre es pot partir del mateix nombre de coordenades generalitzades i de velocitats generalitzades, només cal prendre com a velocitats les derivades de les coordenades, fet prou usual; per tant, si el nombre d'equacions geomètriques i cinemàtiques és el mateix, el nombre de coordenades i de velocitats independents és també el mateix i el sistema és holònom.

Un sistema és no holònom quan entre les velocitats generalitzades existeix alguna relació, equació d'enllaç cinemàtica, que s'estableix directament entre elles i no és integrable; això fa que aquesta relació no es tradueixi en una relació entre coordenades generalitzades, equació d'enllaç geomètrica, i el nombre de coordenades generalitzades independents sigui superior al de velocitats generalitzades independents.

Un sistema d'un grau de llibertat és sempre holònom ja que l'evolució temporal de la seva configuració és única, depèn d'una sola velocitat generalitzada, i per tant només cal una coordenada generalitzada per descriure-la. És a partir de dos graus de llibertat que es pot presentar no holonomia, ja que, en aquest cas, l'evolució de les configuracions del sistema pot dependre de la combinació que es faci entre les diferents velocitats generalitzades independents.

En els sistemes multisòlid o mecanismes, tots els enllaços provenen de parells cinemàtics –contactes entre sòlids– i d'equacions constitutives dels elements sòlids –distàncies i angles constants– i l'única condició d'enllaç que s'imposa, si escau, directament sobre les velocitats és la de no lliscament en els punts de contactes. En els parells inferiors o superficials –cilíndrics, prismàtics, de revolució, esfèrics, plans i helicoidals– el lliscament és necessari per permetre el moviment relatiu entre sòlids. Així doncs, un sistema multisòlid o mecanisme només amb parells inferiors és sempre holònom.

En els parells superiors, el contacte entre sòlids pot ser lineal segons una recta o puntual. Si el contacte és segons una recta i sense lliscament el moviment relatiu entre els sòlids és d'un grau de llibertat i, per tant, una única coordenada generalitzada descriu la seva configuració relativa, això fa que no introdueixi no holonomia. Si el contacte és puntual i en un dels sòlids es produeix sempre en el mateix punt la condició de no lliscament fa que en l'altre sòlid sigui també sempre el mateix punt i, per tant, de fet



cinemàticament és equivalent a un parell esfèric, i en definitiva tampoc no introdueix no holonomia. Queda només el cas de contacte puntual quan els punts de contacte van canviant durant el moviment sense que hi hagi lliscament relatiu –moviment de rodolament. En aquest cas, si el moviment relatiu dels dos sòlids en contacte està condicionat per altres enllaços a ser d'un grau de llibertat, per exemple el cas usual de moviment relatiu pla, de nou no s'introdueix no holonomia com en el cas del contacte lineal. En resum doncs, en els sistemes multisòlid o mecanismes només es pot presentar no holonomia si hi ha rodolament entre sòlids amb moviment relatiu de més d'un grau de llibertat. Els graus de llibertat relatius estan associats a canvi d'orientació relativa ja que el contacte puntual sense lliscament imposa ja tres restriccions de translació associades a la igualtat de velocitat dels punts de contacte. Des del punt de vista pràctic, són sempre holònoms: els mecanismes amb moviment pla, els mecanismes sense rodolaments i els mecanismes amb rodolaments però amb moviment relatiu pla dels sòlids que rodolen.

En aquesta anàlisi, s'ha deixat de banda el cas de contacte puntual amb lliscament direccional, és a dir sense lliscament en alguna direcció, representatiu per exemple de patins sobre gel. Igual que el rodolament sense lliscament, pot portar a la no holonomia, de fet el comportament cinemàtic d'un patí es pot substituir pel d'una roda que rodola.

9.3 Sistema conservatiu

El sistema de la figura 33, un pèndol de dos graus de llibertat, és un sistema holònom de manera que les seves equacions del moviment es poden trobar com equacions de Lagrange ordinàries si per a descriure el seu estat s'utilitzen, per exemple, les dues coordenades generalitzades indicades a la figura i les seves derivades, $\mathbf{q} = \{s, \varphi\}^T$ i $\dot{\mathbf{q}} = \{\dot{s}, \dot{\varphi}\}^T$. Es pot observar que és autònom, no hi ha cap variable que depengui explícitament del temps, i conservatiu, totes les forces que tenen potència associada no nul·la –el pes i la molla– deriven de potencial. En ser conservatiu, la força generalitzada de les forces no conservatives \mathbf{Q} és nul·la. La molla és de comportament lineal de constant k i està distesa per a $s = 0$.

A continuació, es mostren els passos per a la determinació de les equacions del moviment com equacions de Lagrange. Primer, es determinen l'energia cinètica i l'energia potencial, pas que requereix treballar sobre el sistema mecànic concret; a continuació, es fan per a cada coordenada les derivades involucrades en l'expressió 97, que és un



procés analític independent del sistema concret que s'analitza; i, finalment, es munta l'equació per a cada coordenada.

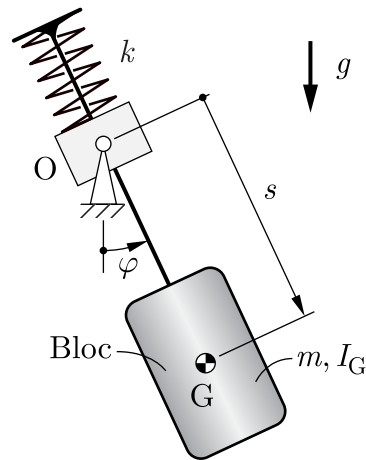


Fig. 33 Pèndol de dos graus de llibertat.

$$\begin{cases} E_c = \frac{1}{2} m \left((s\dot{\varphi})^2 + \dot{s}^2 \right) + \frac{1}{2} I_G \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} (m s^2 + I_G) \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m \dot{s}^2 \\ E_p = -m g s \cos(\varphi) + \frac{1}{2} k s^2 \quad E_p = 0 \text{ quan } \varphi = 0 \text{ i } s = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{s}} \right) = \frac{d}{dt} (m \dot{s}) = m \ddot{s} & \frac{\partial E_c}{\partial s} = m s \dot{\varphi}^2 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{d}{dt} \left((m s^2 + I_G) \dot{\varphi} \right) = (m s^2 + I_G) \ddot{\varphi} & \frac{\partial E_c}{\partial \varphi} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial E_p}{\partial s} = -m g \cos(\varphi) + k s \\ \frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = m g s \sin(\varphi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m \ddot{s} - m s \dot{\varphi}^2 - m g \cos(\varphi) + k s = 0 & \text{per a } s \\ (m s^2 + I_G) \ddot{\varphi} + m g s \sin(\varphi) = 0 & \text{per a } \varphi \end{cases} \quad [98]$$

A partir d'aquestes equacions, es pot determinar la configuració d'equilibri amb el pèndol vertical fent $\dot{\mathbf{q}} = 0$ i $\ddot{\mathbf{q}} = 0$ amb la qual cosa s'obté $\mathbf{q}_{\text{eq}} = \{m g/k, 0\}^T$.



9.4 Sistema no conservatiu autònom

El sòlid de la figura 34 es mou en el pla vertical. El piu O, fix al sòlid, es mou dins de la ranura vertical fixa, i el piu P, situat a l'extrem del conjunt molla–amortidor, es mou tant dins de la ranura vertical fixa com de la ranura del sòlid. La molla i l'amortidor són de comportament lineal de constants k i c respectivament i la longitud de la molla distesa és l_0 . Les resistències passives són negligibles. Es tracta d'un sistema no conservatiu, la força de l'amortidor no és conservativa, autònom, no hi ha cap interacció funció explícita del temps.

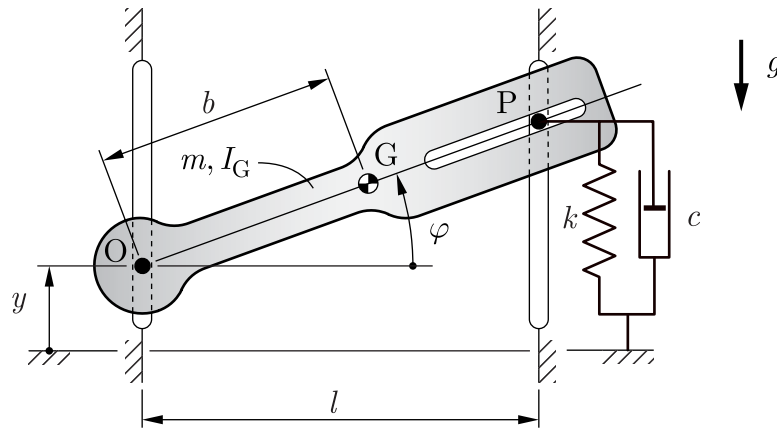


Fig. 34 Sistema no conservatiu autònom.

El sistema té dos graus de llibertat i és holònom; per tant, si el seu estat es descriu, per exemple, amb les coordenades generalitzades y i φ de la figura i les seves derivades temporals, $\mathbf{q} = \{y, \varphi\}^T$ i $\dot{\mathbf{q}} = \{\dot{y}, \dot{\varphi}\}^T$, es poden plantejar les equacions de Lagrange ordinàries com es fa a continuació.

$$\begin{cases} E_c = \frac{1}{2}(I_G + mb^2)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + mb\cos(\varphi)\dot{\varphi}\dot{y} \\ E_p = mg(b\sin(\varphi) + y) + \frac{1}{2}k(l\tan(\varphi) + y - l_0)^2 & E_p = \frac{1}{2}kl_0^2 \text{ quan } \begin{cases} \varphi = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ P_{nc} = -c(\dot{y} + l\sec^2(\varphi)\dot{\varphi})\dot{y} - c(\dot{y} + l\sec^2(\varphi)\dot{\varphi})l\sec^2(\varphi)\dot{\varphi} \end{cases} \quad [99]$$

$$\begin{cases}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{y}} \right) = \frac{d}{dt} (m \dot{y} + m b \cos(\varphi) \dot{\varphi}) = m \ddot{y} + m b (-\sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 + \cos(\varphi) \ddot{\varphi}) \\
\frac{\partial E_c}{\partial y} = 0 \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{d}{dt} \left((I_G + m b^2) \dot{\varphi} + m b \cos(\varphi) \dot{y} \right) = \\
(I_G + m b^2) \ddot{\varphi} + m b (-\sin(\varphi) \dot{\varphi} \dot{y} + \cos(\varphi) \ddot{y}) \\
\frac{\partial E_c}{\partial \varphi} = -m b \sin(\varphi) \dot{\varphi} \dot{y} \\
\frac{\partial E_p}{\partial y} = m g + k (l \tan(\varphi) + y - l_0) \\
\frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = m g b \cos(\varphi) + k (l \tan(\varphi) + y - l_0) l \sec^2(\varphi) \\
Q_y = -c (\dot{y} + l \sec^2(\varphi) \dot{\varphi}) \\
Q_\varphi = -c (\dot{y} + l \sec^2(\varphi) \dot{\varphi}) l \sec^2(\varphi) \\
\begin{cases}
m \ddot{y} + m b \cos(\varphi) \ddot{\varphi} - m b \sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 + m g + k (l \tan(\varphi) + y - l_0) + \\
c (\dot{y} + l \sec^2(\varphi) \dot{\varphi}) = 0 & \text{per a } y \\
(I_G + m b^2) \ddot{\varphi} + m b \cos(\varphi) \ddot{y} + m g b \cos(\varphi) + k (l \tan(\varphi) + y - l_0) l \sec^2(\varphi) + \\
c (\dot{y} + l \sec^2(\varphi) \dot{\varphi}) l \sec^2(\varphi) = 0 & \text{per a } \varphi
\end{cases} \quad [100]
\end{cases}$$

Observant les equacions de l'expressió 100, és fàcil veure que la primera és idèntica a la que s'obté aplicant el teorema de la quantitat de moviment en direcció vertical al sòlid. La segona correspon a aplicar el teorema del moment cinètic prenent moments respecte al punt O. A partir d'aquestes equacions, es pot determinar la configuració d'equilibri fent $\dot{\mathbf{q}} = 0$ i $\ddot{\mathbf{q}} = 0$ i del resultat es conclou, per exemple, que perquè existeix una configuració d'equilibri cal que $b \geq l$.

$$\begin{cases}
m g + k (l \tan(\varphi_{\text{eq}}) + y_{\text{eq}} - l_0) = 0 \\
m g b \cos(\varphi_{\text{eq}}) + k (l \tan(\varphi_{\text{eq}}) + y_{\text{eq}} - l_0) l \sec^2(\varphi_{\text{eq}}) = 0
\end{cases} \quad [101]$$

$$\varphi_{\text{eq}} = \arccos \left(\left(\frac{l}{b} \right)^{1/3} \right); \quad y_{\text{eq}} = l_0 - \frac{m g}{k} - l \tan(\varphi_{\text{eq}})$$



9.5 Configuracions d'equilibri de sistemes autònoms

Per als sistemes conservatius autònoms d'un grau de llibertat s'ha vist, expressió 39, que les posicions d'equilibri corresponen a extrems de l'energia potencial i també que si a un sistema conservatiu s'hi afegeixen forces funció de velocitat que s'anul·len quan aquesta és zero les posicions d'equilibri segueixen verificant la mateixa condició. Les configuracions d'equilibri dels sistemes conservatius autònoms d' n graus de llibertat compleixen una condició equivalent com es mostra a continuació.

Per a determinar les posicions d'equilibri cal imposar la condició de repòs $\dot{\mathbf{q}} = 0$ i $\ddot{\mathbf{q}} = 0$ a les equacions de Lagrange de l'expressió 97.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} - Q_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

En aquestes equacions, els termes que procedeixen de l'energia cinètica E_c contenen factors d'acceleració o velocitat i per tant es fan zero en aplicar la condició de repòs. Per altra banda, si les forces no conservatives amb potència no nul·la s'anul·len quan la velocitat és zero les forces generalitzades Q_i són també nul·les en aplicar la condició de repòs i per tant es verifica:

$$\left. \frac{\partial E_p}{\partial q_i} \right|_{\text{eq}} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad [102]$$

És fàcil comprovar que per al sistema de la figura 34 el sistema d'equacions de l'expressió 101 que dona la configuració d'equilibri es pot obtenir directament aplicant l'expressió 102 a la seva energia potencial, expressió 99.

9.6 Sistema no autònom. Graus de llibertat forçats. Determinació de forces i parells dels actuadors

Tal com ja s'ha explicat anteriorment, són no autònoms els sistemes amb motors, que fan forces i parells funció explícita del temps, i/o actuadors que imposen moviments funció explícita del temps. Això fa que les equacions del moviment depenguin explícitament del temps, $\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, t) = 0$. A causa de la multitud de disposicions dels actuadors i motors i de les funcions que els governen, les equacions del moviment poden dependre de formes molt diverses del temps. La situació més senzilla, que descriu



prou bé molts sistemes reals i que constitueix la base de l'estudi de les vibracions forçades o excitades és aquella en la qual es pot fer una separació de variables de manera que:

$$h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) + \mathbf{e}(t) = 0 \quad [103]$$

El terme funció del temps $\mathbf{e}(t)$ s'anomena excitació del sistema.

Analíticament, és usual entendre per motor lineal un element que només fa una força entre dos punts i per motor angular un element que només fa un parell entre dos sòlids. De manera semblant, un actuador lineal imposa únicament la distància entre dos punts i un actuador angular imposa únicament l'angle entre dos sòlids.

En plantejar les equacions de Lagrange d'un sistema no autònom, les forces i parells dels motors i actuadors apareixen formant part de les forces generalitzades. Les forces generalitzades associades als motors són conegudes a priori funció del temps, mentre que les associades als actuadors són incògnita i valen el què calgui per garantir el moviment imposat al llarg del temps. Les equacions de Lagrange permeten determinar els moviments que es generen a causa entre d'altres dels motors i les forces o parells dels actuadors.

El nombre de motors en un sistema no està limitat; des del punt de vista analític, augmentar-ne el nombre només incrementa la complexitat de les forces generalitzades conegudes a priori funció del temps. Ara bé, el nombre d'actuadors està limitat i cal veure la seva compatibilitat ja que, evidentment, han de ser compatibles les condicions geomètriques i cinemàtiques que imposen, entre ells i amb els enllaços existents. Suposada ja la seva compatibilitat, cada actuador elimina un grau de llibertat lliure i introdueix una incògnita; per tant, el seu nombre no pot superar el nombre de graus de llibertat originals.

Quan el sistema real conté actuadors redundants, com succeeix sovint amb els enllaços per raons de disseny, de resistència de components mecànics, etc., cal plantejar-se si la modelització més adequada és eliminar actuadors redundants o passar a considerar-los motors que poden realitzar forces o parells més o menys elevats, que de fet és el que succeeix.



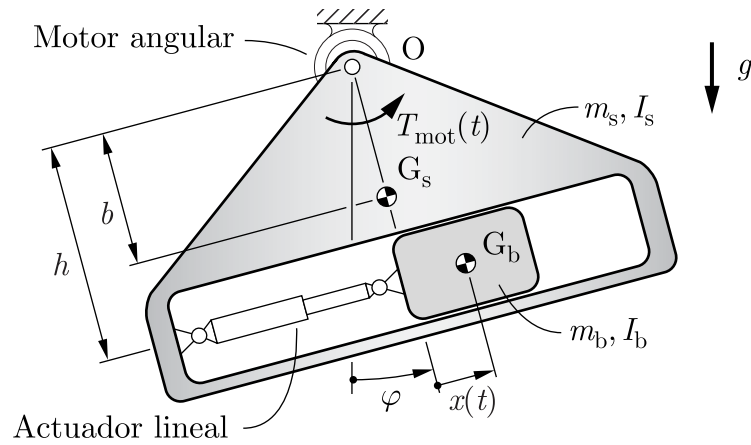


Fig. 35 Sistema amb un actuator lineal i un motor angular.

A la figura 35, es presenta un sistema no autònom de dos graus de llibertat, un de lliure i un de forçat. El grau de llibertat associat a la rotació φ a l'entorn de l'eix horitzontal que passa per O és lliure, evoluciona temporalment segons li marca la dinàmica del sistema. El motor angular introdueix un parell $T_{\text{mot}}(t)$ que evoluciona temporalment de manera predeterminada i que si bé influeix en la dinàmica del sistema no condiciona directament l'evolució temporal de φ . El grau de llibertat associat al desplaçament $x(t)$ és forçat, evoluciona temporalment de manera predeterminada segons li marca l'actuator lineal. A continuació, es plantegen les equacions de Lagrange amb $\mathbf{q} = \{x, \varphi\}^T$ i $\dot{\mathbf{q}} = \{\dot{x}, \dot{\varphi}\}^T$.

$$\begin{cases} E_c = \frac{1}{2} \left(I_s + m_s b^2 + I_b + m_b (h^2 + x^2) \right) \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_b \dot{x}^2 + m_b h \dot{\varphi} \dot{x} \\ E_p = m_s g b (1 - \cos(\varphi)) + m_b g (h - h \cos(\varphi) + x \sin(\varphi)) & E_p = 0 \text{ quan } \varphi = 0 \\ P_{nc} = T_{\text{mot}} \dot{\varphi} + F_{\text{act}} \dot{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{d}{dt} (m_b \dot{x} + m_b h \dot{\varphi}) = m_b (\ddot{x} + h \ddot{\varphi}) & \frac{\partial E_c}{\partial x} = m_b \dot{\varphi}^2 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{d}{dt} (I \dot{\varphi} + m_b h \dot{x}) = I \ddot{\varphi} + 2 m_b x \dot{x} \dot{\varphi} + m_b h \ddot{x} & \frac{\partial E_c}{\partial \varphi} = 0 \\ I = (I_s + m_s b^2 + I_b + m_b (h^2 + x^2)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial E_p}{\partial x} = m_b g \sin(\varphi) \\ \frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = m_s g b \sin(\varphi) + m_b g (h \sin(\varphi) + x \cos(\varphi)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q_x = F_{\text{act}} & Q_\varphi = T_{\text{mot}}(t) \\ \left\{ \begin{array}{l} m_b (\ddot{x} + h \ddot{\varphi}) - m_b \dot{\varphi}^2 x + m_b g \sin(\varphi) - F_{\text{act}} = 0 \\ I \ddot{\varphi} + 2 m_b x \dot{x} \dot{\varphi} + m_b h \ddot{x} + m_s g b \sin(\varphi) + \\ \quad m_b g (h \sin(\varphi) + x \cos(\varphi)) - T_{\text{mot}}(t) = 0 \end{array} \right. \end{cases} \begin{array}{l} \text{per a } x \\ \text{per a } \varphi \end{array}$$

La primera equació coincideix amb la que s'obté aplicant el teorema de la quantitat de moviment al bloc m_b en la direcció de la guia. Conegut el moviment, aquesta equació permet determinar la força de l'actuador lineal F_{act} . La segona equació, no és tant evident però, coincideix amb la que s'obté aplicant el teorema del moment cinètic prenent moments respecte l'eix de l'articulació O. En aquesta equació, l'única incògnita és l'angle φ i les seves derivades que es troben integrant-la adequadament.

9.7 Determinació de forces i moments d'enllaç

Per a la determinació de les forces i moments d'enllaç utilitzant les equacions de Lagrange ordinàries, s'utilitza l'estratègia de substituir els enllaços per actuadors que puguin imposar les mateixes condicions geomètriques i cinemàtiques i determinar les forces i moments d'aquests per fer-ho. En aquest estudi se suposa l'absència d'enllaços redundants.

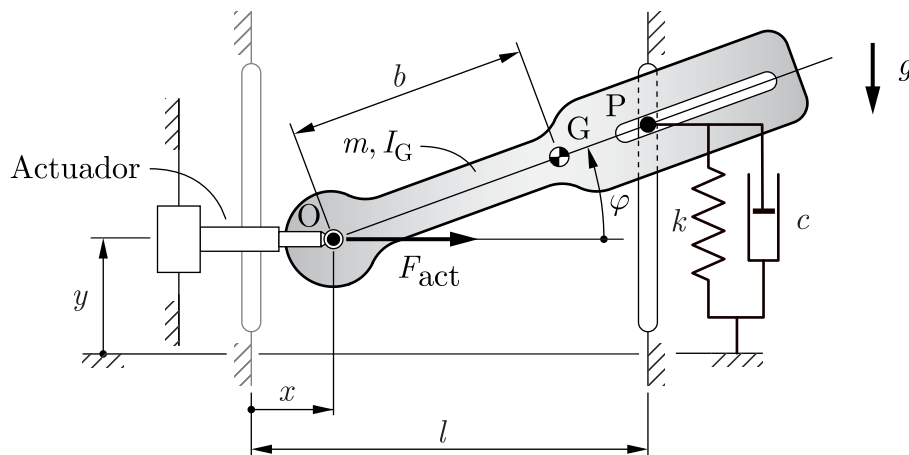


Fig. 36 Sistema de la figura 34 amb un enllaç substituït per un actuador.

A la figura 36, es mostra el sistema de la figura 34 modificat per a poder determinar amb les equacions de Lagrange ordinàries la força d'enllaç entre el pivots O i la ranura. En primer lloc, s'ha prescindit de l'enllaç entre el pivots i la ranura amb la qual cosa el sistema passa a tenir 3 graus de llibertat, $\mathbf{q} = \{x, y, \varphi\}^T$ i $\dot{\mathbf{q}} = \{\dot{x}, \dot{y}, \dot{\varphi}\}^T$. A continua-



ció, el piú s'ha agafat amb un actuator lineal que imposa la coordenada horitzontal x , com ho fa l'enllaç a $x = 0$, i pot moure's lliurement en direcció vertical. El sistema resultant és un sistema holònom no autònom, a causa de la presència de l'actuator, del qual es pot determinar la força de l'actuator F_{act} , tal com s'ha vist a l'apartat anterior, i particularitzar-la per a $x = 0$, $\dot{x} = 0$ i $\ddot{x} = 0$. En ser aquesta condició igual a la que imposa l'enllaç, la força que ha de fer l'actuator coincideix amb la força d'enllaç que ha de fer la ranura. A continuació, es mostra la determinació de les equacions de Lagrange del sistema modificat.

$$\left\{ \begin{array}{l} E_c = \frac{1}{2}(I_G + mb^2)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + mb(-\sin(\varphi)\dot{\varphi}\dot{x} + \cos(\varphi)\dot{\varphi}\dot{y}) \\ E_p = mg(y + b\sin(\varphi)) + \frac{1}{2}k(y + (l-x)\tan(\varphi) - l_0)^2 \quad E_p = \frac{1}{2}kl_0^2 \quad \text{quan } \begin{cases} \varphi = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ F_c = -c(\dot{y} + (l-x)\sec^2(\varphi)\dot{\varphi} - \tan(\varphi)\dot{x}) \\ P_{\text{nc}} = (F_{\text{act}} - F_c \tan(\varphi))\dot{x} + F_c\dot{y} + F_c(l-x)\sec^2(\varphi)\dot{\varphi} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{d}{dt} (m\dot{x} - mb\sin(\varphi)\dot{\varphi}) = m\ddot{x} + mb(-\cos(\varphi)\dot{\varphi}^2 - \sin(\varphi)\ddot{\varphi}) \\ \frac{\partial E_c}{\partial x} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{y}} \right) = \frac{d}{dt} (m\dot{y} + mb\cos(\varphi)\dot{\varphi}) = m\ddot{y} + mb(-\sin(\varphi)\dot{\varphi}^2 + \cos(\varphi)\ddot{\varphi}) \\ \frac{\partial E_c}{\partial y} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{d}{dt} \left((I_G + mb^2)\dot{\varphi} + mb(-\sin(\varphi)\dot{x} + \cos(\varphi)\dot{y}) \right) = \\ (I_G + mb^2)\ddot{\varphi} + mb(-\cos(\varphi)\dot{\varphi}\dot{x} - \sin(\varphi)\ddot{x} - \sin(\varphi)\dot{\varphi}\dot{y} + \cos(\varphi)\ddot{y}) \\ \frac{\partial E_c}{\partial \varphi} = -mb(\cos(\varphi)\dot{\varphi}\dot{x} + \sin(\varphi)\dot{\varphi}\dot{y}) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_p}{\partial x} = -k(y + (l-x)\tan(\varphi) - l_0)\tan(\varphi) \\ \frac{\partial E_p}{\partial y} = mg + k(y + (l-x)\tan(\varphi) - l_0) \\ \frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = mgb\cos(\varphi) + k(y + (l-x)\tan(\varphi) - l_0)(l-x)\sec^2(\varphi) \end{array} \right.$$



$$\begin{cases} Q_x = F_{\text{act}} - F_c \tan(\varphi) & Q_y = F_c & Q_\varphi = F_c (l-x) \sec^2(\varphi) \\ m\ddot{x} + mb(-\cos(\varphi)\dot{\varphi}^2 - \sin(\varphi)\ddot{\varphi}) - k(y + (l-x)\tan(\varphi) - l_0)\tan(\varphi) - F_{\text{act}} + \\ \quad F_c \tan(\varphi) = 0 \\ m\ddot{y} + mb(-\sin(\varphi)\dot{\varphi}^2 + \cos(\varphi)\ddot{\varphi}) + mg + k(y + (l-x)\tan(\varphi) - l_0) - F_c = 0 \\ (I_G + mb^2)\ddot{\varphi} - mb\sin(\varphi)\ddot{x} + mb\cos(\varphi)\ddot{y} + mgb\cos(\varphi) + \\ \quad k(y + (l-x)\tan(\varphi) - l_0)(l-x)\sec^2(\varphi) - F_c(l-x)\sec^2(\varphi) = 0 \end{cases}$$

La primera equació de Lagrange coincideix amb la que s'obté aplicat el teorema de la quantitat de moviment al sòlid en direcció horitzontal. Fent $x = 0$, $\dot{x} = 0$ i $\ddot{x} = 0$ en aquesta equació, tal com imposa la condició d'enllaç amb la ranura, la força de l'actuador que s'obté és la força d'enllaç.

$$\begin{aligned} mb(-\cos(\varphi)\dot{\varphi}^2 - \sin(\varphi)\ddot{\varphi}) - k(y + l\tan(\varphi) - l_0)\tan(\varphi) - F_{\text{act}} + F_c \tan(\varphi) &= 0 \\ F_{\text{act}} = F_{\text{enllaç}} = mb(-\cos(\varphi)\dot{\varphi}^2 - \sin(\varphi)\ddot{\varphi}) + (F_{\text{molla}} + F_c)\tan(\varphi) \end{aligned}$$

9.8 Linealització. Matriu d'inèrcia i de rigidesa

Tal com ja s'ha vist per al sistema d'un grau de llibertat, el teorema de l'energia en versió diferencial permet obtenir directament l'equació del moviment linealitzada a l'entorn d'una posició d'equilibri. Les equacions de Lagrange permeten obtenir directament les equacions del moviment linealitzades per als sistemes d' n graus de llibertat. El procediment per a fer aquesta linealització es basa en la descomposició en sèrie de Taylor com es fa a les expressions 15 i anteriors.

A continuació, es linealitzen les equacions de Lagrange d'un sistema autònom, $\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0}$, a l'entorn d'una posició d'equilibri \mathbf{q}_{eq} , que verifica $\mathbf{h}(\mathbf{q}_{\text{eq}}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$, i a l'entorn de les velocitats i acceleracions nul·les.

Es representa per $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{q}_{\text{eq}}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ el punt –posició, velocitat i acceleració– a l'entorn del qual es fa el desenvolupament en sèrie. Després de la linealització, es prenen, com és habitual, les coordenades generalitzades ε_i amb origen en el punt on s'ha fet el desenvolupament de manera que es té el vectors ε , $\dot{\varepsilon}$ i $\ddot{\varepsilon}$ de components:

$$\varepsilon_i = q_i - q_{0i} \quad \dot{\varepsilon}_i = \dot{q}_i \quad \ddot{\varepsilon}_i = \ddot{q}_i$$



Si es representa per h_i la i -èsima equació de Lagrange:

$$h_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} - Q_i \text{ amb } E_c = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j m_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j$$

la seva expressió linealitzada a l'entorn de la posició d'equilibri és, tenint en compte que $h_i(\mathbf{q}_{\text{eq}}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$:

$$\sum_j \left(\frac{\partial h_i}{\partial \ddot{q}_j} \bigg|_{\mathbf{x}_0} \ddot{\varepsilon}_j + \frac{\partial h_i}{\partial \dot{q}_j} \bigg|_{\mathbf{x}_0} \dot{\varepsilon}_j + \frac{\partial h_i}{\partial q_j} \bigg|_{\mathbf{x}_0} \varepsilon_j \right) = 0 \quad [104]$$

Desenvolupant l'expressió 104 s'obté:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_j \frac{\partial}{\partial \ddot{q}_j} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) \bigg|_{\mathbf{x}_0} \ddot{\varepsilon}_j = \sum_j \frac{\partial}{\partial \ddot{q}_j} \left(m_{ii} \ddot{q}_i + \sum_{k \neq i} \left(\frac{1}{2} m_{ik} + \frac{1}{2} m_{ki} \right) \ddot{q}_k \right) \bigg|_{\mathbf{x}_0} \ddot{\varepsilon}_j = \\ \qquad \qquad \qquad m_{ii}(\mathbf{q}_{\text{eq}}) \ddot{\varepsilon}_i + \sum_{j \neq i} \left(\frac{1}{2} m_{ij}(\mathbf{q}_{\text{eq}}) + \frac{1}{2} m_{ji}(\mathbf{q}_{\text{eq}}) \right) \ddot{\varepsilon}_j \\ \sum_j \frac{\partial}{\partial \ddot{q}_j} \left(\frac{\partial E_c}{\partial q_i} \right) \bigg|_{\mathbf{x}_0} \ddot{\varepsilon}_j = 0 \qquad \sum_j \frac{\partial}{\partial \ddot{q}_j} \left(\frac{\partial E_p}{\partial q_i} \right) \bigg|_{\mathbf{x}_0} \ddot{\varepsilon}_j = 0 \\ \sum_j \frac{\partial}{\partial \ddot{q}_j} (Q_i) \bigg|_{\mathbf{x}_0} \ddot{\varepsilon}_j = 0 \end{array} \right.$$

Per a adequar-se al formulisme matricial que es donarà a les equacions de Lagrange linealitzades cal prendre $m_{ij}(\mathbf{q}_{\text{eq}}) = m_{ji}(\mathbf{q}_{\text{eq}})$; d'aquesta manera:

$$\sum_j \frac{\partial}{\partial \ddot{q}_j} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) \bigg|_{\mathbf{x}_0} \ddot{\varepsilon}_j = \sum_j m_{ij}(\mathbf{q}_{\text{eq}}) \ddot{\varepsilon}_j$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sum_j \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) \bigg|_{\mathbf{x}_0} \dot{\varepsilon}_j = 0 & \sum_j \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{\partial E_c}{\partial q_i} \right) \bigg|_{\mathbf{x}_0} \dot{\varepsilon}_j = 0 \\ \sum_j \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{\partial E_p}{\partial q_i} \right) \bigg|_{\mathbf{x}_0} \dot{\varepsilon}_j = 0 & \sum_j \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (Q_i) \bigg|_{\mathbf{x}_0} \dot{\varepsilon}_j = \sum_j Q_{\dot{q}_i j} \dot{\varepsilon}_j \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_j \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) \Big|_{\mathbf{x}_0} \varepsilon_j = 0 \quad \sum_j \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial E_c}{\partial q_i} \right) \Big|_{\mathbf{x}_0} \varepsilon_j = 0 \\ \sum_j \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial E_p}{\partial q_i} \right) \Big|_{\mathbf{x}_0} \varepsilon_j = \sum_j \left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial q_i \partial q_j} \right) \Big|_{\mathbf{x}_0} \varepsilon_j = \sum_j k_{ij} \varepsilon_j \quad \text{amb } k_{ij} = \frac{\partial^2 E_p}{\partial q_i \partial q_j} \Big|_{\mathbf{q}_{\text{eq}}} \\ \sum_j \frac{\partial}{\partial q_j} (Q_i) \Big|_{\mathbf{x}_0} \varepsilon_j = \sum_j Q_{q_{ij}} \varepsilon_j \end{array} \right.$$

En resum, per als sistemes autònoms, l'expressió linealitzada de les equacions de Lagrange és:

$$\sum_j m_{ij}(\mathbf{q}_{\text{eq}}) \ddot{\varepsilon}_j - \sum_j Q_{\dot{q}_{ij}} \dot{\varepsilon}_j + \sum_j k_{ij} \varepsilon_j - \sum_j Q_{q_{ij}} \varepsilon_j = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad [105]$$

El conjunt d'aquestes equacions es pot escriure de forma matricial i sovint se l'anomena equació matricial del moviment del sistema:

$$\mathbf{M} \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{Q}_{\dot{q}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{K} \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{Q}_q \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0} \quad [106]$$

És interessant remarcar la semblança d'aquesta expressió amb l'expressió 75 trobada per als sistemes d'un grau de llibertat a partir del teorema de l'energia en versió diferencial.

L'energia cinètica, expressió 90, és una forma quadràtica de les velocitats generalitzades i la matriu $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ d'aquesta forma quadràtica s'anomena matriu d'inèrcia i és en principi funció de les coordenades generalitzades del sistema.

$$E_c(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j m_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$$

La matriu \mathbf{M} de l'expressió 106 és la matriu d'inèrcia particularitzada per a la configuració d'equilibri \mathbf{q}_{eq} i s'obté per identificació dels seus termes a l'expressió de l'energia cinètica $\mathbf{E}_c(\mathbf{q}_{\text{eq}})$. Tal com s'ha dit el formulisme matricial adoptat fa que sigui necessari que $m_{ij}(\mathbf{q}_{\text{eq}}) = m_{ji}(\mathbf{q}_{\text{eq}})$, i per tant la matriu d'inèrcia \mathbf{M} és simètrica.



$$E_c(\mathbf{q}_{\text{eq}}) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j m_{ij}(\mathbf{q}_{\text{eq}}) \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}_{\text{eq}}) \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \quad [107]$$

La matriu \mathbf{K} , que té per components les derivades segones de l'energia potencial particularitzades per a la configuració \mathbf{q}_{eq} , s'anomena matriu de rigidesa. Per la seva definició és simètrica.

$$k_{ij} = \left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{\mathbf{q}_{\text{eq}}} \rightarrow \mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1n} \\ \vdots & & \\ k_{n1} & \cdots & k_{nn} \end{pmatrix} \quad [108]$$

Si l'energia potencial és una forma quadràtica de les coordenades generalitzades, amb origen a la posició d'equilibri, i s'escriu $E_p = (1/2) \sum_i \sum_j a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$ amb $a_{ij} = a_{ji}$, la matriu \mathbf{K} es pot escriure directament per identificació de termes ja que en aquest cas:

$$\left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{\mathbf{q}_{\text{eq}}} = a_{ij} = k_{ij}$$

La matriu \mathbf{Q}_i és usual anomenar-la, amb el signe canviat, matriu d'esmoreïment \mathbf{C} pel fet de ser la matriu de coeficients de les velocitats. Per a la seva determinació, cal en principi trobar primer les forces generalitzades Q_i . A priori no té cap propietat particular.

$$Q_{\dot{q}ij} = \left. \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (Q_i) \right|_{\mathbf{x}_0} \rightarrow \mathbf{C} = -\mathbf{Q}_{\dot{q}} = - \begin{pmatrix} Q_{\dot{q}11} & \cdots & Q_{\dot{q}1n} \\ \vdots & & \\ Q_{\dot{q}n1} & \cdots & Q_{\dot{q}nn} \end{pmatrix} \quad [109]$$

Per als sistemes no autònoms, les equacions de Lagrange depenen explícitament del temps, $\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{0}$, i en principi deixen de tenir sentit les posicions d'equilibri tal com s'han definit per als sistemes autònoms ja que en una posició amb velocitat nul·la l'acceleració pot o no ser nul·la segons l'instant. Tal com s'ha comentat per als sistemes no autònoms d'un grau de llibertat, si les equacions del moviment, obtingudes o no com equacions de Lagrange, admeten la separació de variables $\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) - \mathbf{e}(t) = 0$ sovint es fa referència a les posicions d'equilibri quan l'excitació és nul·la, $\mathbf{e}(t) = 0$, i és al voltant d'aquestes posicions que, si convé,



es linealitzada la funció $f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$. La linealització d' $\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{0}$ en la variable t no té sentit a causa del caràcter monòton creixent del temps t .

Exemple 1. Sistema conservatiu

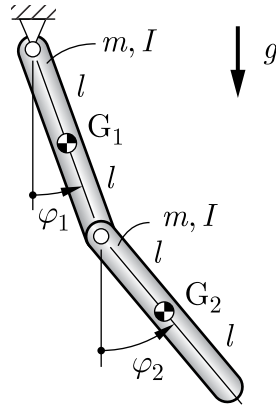


Fig. 37 Pèndol doble.

A la figura 37, es mostra un pèndol doble format per dues barres iguals, de massa m i moment central d'inèrcia I , articulades i que es mouen sense resistències passives. El seu estat es descriu amb les coordenades i velocitats $\mathbf{q} = \{\varphi_1, \varphi_2\}^T$ i $\dot{\mathbf{q}} = \{\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2\}^T$. Es tracta de determinar la matriu d'inèrcia \mathbf{M} i la matriu de rigidesa \mathbf{K} per a la posició d'equilibri.

$$\begin{cases} E_c = \frac{1}{2}(I + 5ml^2)\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}(I + ml^2)\dot{\varphi}_2^2 + 2ml^2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \\ E_p = mgl(1 - 3\cos(\varphi_1)) + mgl(3 - \cos(\varphi_2)) \end{cases}$$

Per inspecció directa o fent $\left. \frac{\partial E_p}{\partial q_i} \right|_{\text{eq}} = 0$, es conclou que la posició d'equilibri estable és $\mathbf{q}_{\text{eq}} = \{0, 0\}^T$. L'energia cinètica en aquesta posició és:

$$E_c(\mathbf{q}_{\text{eq}}) = \frac{1}{2}(I + 5ml^2)\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}(I + ml^2)\dot{\varphi}_2^2 + 2ml^2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2$$

De fet, si l'energia cinètica només s'utilitza per a trobar la matriu d'inèrcia no cal trobar-ne la seva expressió general i després particularitzar, es pot trobar directament per a la posició d'equilibri, que en ser una posició particular en principi resultarà més fàcil d'obtenir.



La matriu d'inèrcia M s'identifica, segons l'expressió 107, de l'expressió anterior de l'energia cinètica a la posició d'equilibri $\mathbf{E}_c(\mathbf{q}_{eq})$.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} I + 5 m l^2 & 2 m l^2 \\ 2 m l^2 & I + m l^2 \end{pmatrix}$$

La matriu de rigidesa \mathbf{K} es determina, segons l'expressió 108, a partir de les derivades segones de l'energia potencial E_p particularitzades per a la posició d'equilibri.

$$\begin{cases} k_{11} = \left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial^2 \varphi_1} \right|_{\mathbf{q}_{eq}} = 3 m g l \cos(\varphi_1) \Big|_{\mathbf{q}_{eq}} = 3 m g l \\ k_{22} = \left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial^2 \varphi_2} \right|_{\mathbf{q}_{eq}} = m g l \cos(\varphi_2) \Big|_{\mathbf{q}_{eq}} = m g l \\ k_{12} = k_{21} = \left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} \right|_{\mathbf{q}_{eq}} = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 3 m g l & 0 \\ 0 & m g l \end{pmatrix}$$

Exemple 2. Sistema autònom

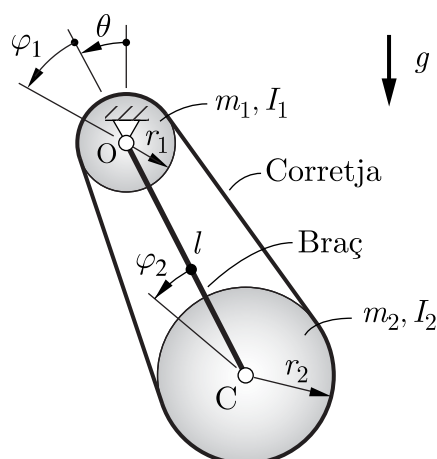


Fig. 38 Conjunt de dues politges oscil·lants.

En el sistema de la figura 38, les politges de radi r_1 i r_2 estan articulades al braç OC i unides amb una corretja que no llisca respecte a elles. El braç està articulat a una paret vertical mitjançant una articulació d'eix horitzontal en el punt O. El braç forma un angle θ respecte a la vertical i φ_1 i φ_2 són els angles que formen les politges respecte al braç. El braç i la corretja es consideren d'inèrcia negligible. Les resistències passives es modelitzen com frecs viscosos a les articulacions de coeficients: c_1 entre la politja de radi r_1 i el braç, c_2 entre la politja de radi r_2 i el braç i c_3 entre el braç i la paret. El seu estat es descriu amb les coordenades i velocitats $\mathbf{q} = \{\theta, \varphi_1\}^T$ i $\dot{\mathbf{q}} = \{\dot{\theta}, \dot{\varphi}_1\}^T$. Es tracta de determinar per a la posició d'equilibri la matriu d'inèrcia \mathbf{M} , la matriu de rigidesa \mathbf{K} i la matriu d'esmoreïment \mathbf{C} provinent de les resistències passives.

$$\begin{cases} E_c = \frac{1}{2}I_1(\dot{\theta} + \dot{\varphi}_1)^2 + \frac{1}{2}I_2(\dot{\theta} + \dot{\varphi}_2)^2 + \frac{1}{2}m_2 l^2 \dot{\theta}^2 = \\ \quad \frac{1}{2}(I_1 + I_2 + m_2 l^2)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(I_1 + I_2\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right)\dot{\varphi}_1^2 + \left(I_1 + I_2\left(\frac{r_1}{r_2}\right)\right)\dot{\theta}\dot{\varphi}_1 \\ E_p = m_2 g l (1 - \cos(\theta)) \\ P_{nc} = (-c_3 \dot{\theta})\dot{\theta} + \left(-\left(c_1 + c_2\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right)\dot{\varphi}_1\right)\dot{\varphi}_1 \end{cases}$$

El sistema està en equilibri per a $\theta = 0$, com es pot veure per inspecció directa o buscant el mínim de l'energia potencial, expressió 102, i tenint en compte que les resistències passives es modelitzen com frecs viscosos, i per tant són nul·les si les velocitats ho són.

La matriu d'inèrcia \mathbf{M} s'obté, segons l'expressió 107, de l'expressió de l'energia cinètica E_c que en aquest exemple no cal particularitzar per a la posició d'equilibri.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} I_1 + I_2 + m_2 l^2 & \left(I_1 + I_2\left(\frac{r_1}{r_2}\right)\right) \\ \left(I_1 + I_2\left(\frac{r_1}{r_2}\right)\right) & I_1 + I_2\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \end{pmatrix}$$

La matriu de rigidesa \mathbf{K} es determina, segons l'expressió 108, a partir de les derivades segones de l'energia potencial E_p .

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} m_2 g l & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



La determinació de la matriu d'esmoreïment \mathbf{C} requereix primer trobar les forces generalitzades Q_i a partir de la potència de les forces no conservatives. En aquest cas els termes de la matriu \mathbf{C} es poden escriure per inspecció directa, o el que de fet és el mateix, la manipulació de les derivades parcials implicades és trivial.

$$Q_\theta = -c_3 \dot{\theta} \quad Q_{\varphi_1} = -\left(c_1 + c_2 \left(r_1/r_2\right)^2\right) \dot{\varphi}_1$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_3 & 0 \\ 0 & \left(c_1 + c_2 \left(r_1/r_2\right)^2\right) \end{pmatrix}$$

Exemple 3. Exemple global

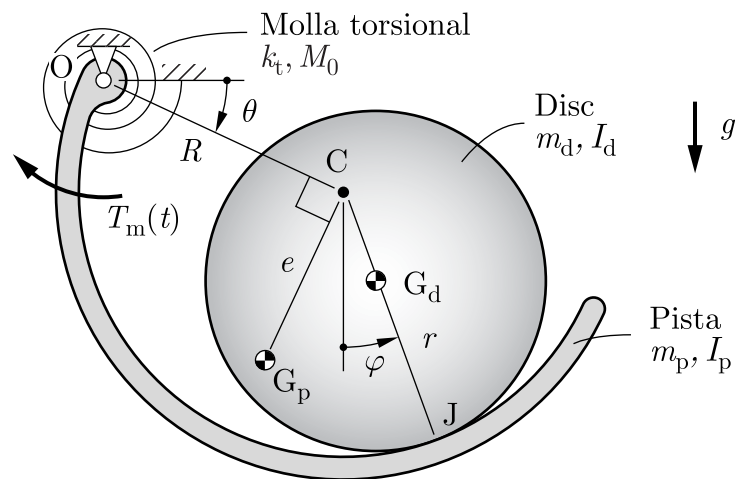


Fig. 39 Disc rodolant per una pista circular oscil·lant.

El sistema de la figura 39 està format per un disc, de massa m_d i moment central d'inèrcia I_d , que rodola sense lliscar sobre una pista circular, de massa m_p i moment central d'inèrcia I_p . La pista pot oscil·lar a l'entorn de l'articulació O d'eix horitzontal i sobre ella actuen una molla torsional de constant k_t que li fa un parell M_0 de sentit contrari a θ creixent quan $\theta = 0$ i un motor que li fa un parell $T_m(t)$. Les resistències passives a l'articulació O es modelitzen com un parell viscos de constant c_O proporcional a $\dot{\theta}$ i les resistències passives de rodolament a J es modelitzen també com un parell viscos de constant c_J proporcional a la velocitat de rodolament $\dot{\theta} + \dot{\varphi}$. L'estat del sistema es defineix mitjançant les coordenades generalitzades $\mathbf{q} = \{\theta, \varphi\}^T$ i les seves derivades.

L'energia cinètica, l'energia potencial i la potència de les forces no conservatives del sistema es mostren a les expressions 110 i a continuació es determinen les equacions de Lagrange ordinàries.

$$\left\{ \begin{array}{l} E_c = \frac{1}{2} \left(I_p + m_p (R^2 + e^2) + m_d R^2 \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \left(I_d + m_d (R-r)^2 \right) \dot{\varphi}^2 + \\ \quad \frac{1}{2} \left(-2 m_d (R-r) R \sin(\theta + \varphi) \dot{\theta} \dot{\varphi} \right) \\ E_p = -m_p g (R \sin(\theta) + e \cos(\theta)) - m_d g (R \sin(\theta) + (R-r) \cos(\varphi)) + \\ \quad M_0 \theta + \frac{1}{2} k_t \theta^2 \\ P_{nc} = (-c_O \dot{\theta}) \dot{\theta} + (-c_J (\dot{\theta} + \dot{\varphi})) (\dot{\theta} + \dot{\varphi}) + T_m(t) \dot{\theta} = \\ \quad (-c_O \dot{\theta} - c_J (\dot{\theta} + \dot{\varphi}) + T_m(t)) \dot{\theta} + (-c_J (\dot{\theta} + \dot{\varphi})) \dot{\varphi} \end{array} \right. \quad [110]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\left(I_p + m_p (R+e)^2 + m_d R^2 \right) \dot{\theta} - m_d (R-r) R \sin(\theta + \varphi) \dot{\varphi} \right) = \\ \quad \left(I_p + m_p (R+e)^2 + m_d R^2 \right) \ddot{\theta} - m_d (R-r) R \left(\sin(\theta + \varphi) \ddot{\varphi} + \right. \\ \quad \left. \cos(\theta + \varphi) (\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \dot{\varphi} \right) \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \theta} = -m_d (R-r) R \cos(\theta + \varphi) \dot{\theta} \dot{\varphi}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\left(I_d + m_d (R-r)^2 \right) \dot{\varphi} - m_d (R-r) R \sin(\theta + \varphi) \dot{\theta} \right) = \\ \quad \left(I_d + m_d (R-r)^2 \right) \ddot{\varphi} - m_d (R-r) R \left(\sin(\theta + \varphi) \ddot{\theta} + \right. \\ \quad \left. \cos(\theta + \varphi) (\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \dot{\theta} \right) \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \varphi} = -m_d (R-r) R \cos(\theta + \varphi) \dot{\theta} \dot{\varphi}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_p}{\partial \theta} = -m_p g (R \cos(\theta) - e \sin(\theta)) - m_d g R \cos(\theta) + M_0 + k_t \theta \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = m_d g (R-r) \sin(\varphi) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_\theta = -c_O \dot{\theta} - c_J (\dot{\theta} + \dot{\varphi}) + T_m(t) \quad Q_\varphi = -c_J (\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \left(I_p + m_p (R + e)^2 + m_d R^2 \right) \ddot{\theta} - m_d (R - r) R \left(\sin(\theta + \varphi) \ddot{\varphi} + \cos(\theta + \varphi) \dot{\varphi}^2 \right) - \\ m_p g \left(R \cos(\theta) - e \sin(\theta) \right) - m_d g R \cos(\theta) + M_0 + k_t \theta + \\ c_O \dot{\theta} + c_J (\dot{\theta} + \dot{\varphi}) - T_m(t) = 0 \\ \left(I_d + m_d (R - r)^2 \right) \ddot{\theta} - m_d (R - r) R \left(\sin(\theta + \varphi) \ddot{\theta} + \cos(\theta + \varphi) \dot{\theta}^2 \right) + \\ m_d g (R - r) \sin(\varphi) + c_J (\dot{\theta} + \dot{\varphi}) = 0 \end{array} \right.$$

Si el parell motor és nul, $T_m(t) = 0$, les forces generalitzades s'anul·len quan les velocitats són nul·les i per tant, segons s'ha vist, a partir de l'energia potencial es poden trobar les posicions d'equilibri, per a les quals les derivades parcials de l'energia potencial respecte a les coordenades generalitzades són nul·les, expressió 102.

$$\left\{ \begin{array}{l} \left. \frac{\partial E_p}{\partial \theta} \right|_{\text{eq}} = 0 \quad \rightarrow \quad -m_p g \left(R \cos(\theta_{\text{eq}}) - e \sin(\theta_{\text{eq}}) \right) - m_d g R \cos(\theta_{\text{eq}}) + \\ M_0 + k_t \theta_{\text{eq}} = 0 \\ \left. \frac{\partial E_p}{\partial \varphi} \right|_{\text{eq}} = 0 \quad \rightarrow \quad m_d g (R - r) \sin(\varphi_{\text{eq}}) = 0 \quad \rightarrow \quad \varphi_{\text{eq}} = 0 \end{array} \right.$$

A partir d'aquestes expressions, es pot trobar, per exemple, el parell M_0 de la molla torsional per tal que en la posició d'equilibri $\theta_{\text{eq}} = 0$.

$$M_0 = (m_p + m_d) g R$$

Les matrius d'inèrcia \mathbf{M} , de rigidesa \mathbf{K} i d'esmoreïment \mathbf{C} a la posició d'equilibri $\mathbf{q}_{\text{eq}} = \{0, 0\}^T$ s'obtenen de l'energia cinètica, expressió 107, de l'energia potencial, expressió 108, i de les forces generalitzades, expressió 109.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} I_p + m_p (R^2 + e^2) + m_d R^2 & 0 \\ 0 & I_d + m_d (R - r)^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} m_p g R + k_t & 0 \\ 0 & m_d g (R - r) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_O + c_J & c_J \\ c_J & c_J \end{pmatrix}$$



La posició d'equilibri estudiada és estable ja que els valors propis de la matriu dinàmica del sistema diagonalitzat $\mathbf{D} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ són positius i la potència de les forces no conservatives és sempre negativa. L'energia potencial a la posició d'equilibri és mínima i a l'entorn d'aquest punt és la forma quadràtica $E_p = (1/2)\mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}$.

Si el parell motor $T_m(t)$ no és nul a les equacions de Lagrange es posa de manifest que es pot fer la separació de variables proposada a l'expressió 103 i el vector d'excitació $\mathbf{e}(t)$ és:

$$\mathbf{e}(t) = \{T_m(t), 0\}^T$$

Amb el parell motor, l'equació matricial del moviment del sistema linealitzat a l'entorn de la posició d'equilibri quan $T_m(t) = 0$ és doncs:

$$\begin{pmatrix} I_p + m_p(R^2 + e^2) + m_d R^2 & 0 \\ 0 & I_d + m_d(R-r)^2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\varphi} \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} c_O + c_J & c_J \\ c_J & c_J \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} m_p g R + k_t & 0 \\ 0 & m_d g(R-r) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_m(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

En les condicions del paràgraf anterior es pot determinar la matriu de resposta freqüencial del sistema $\mathbf{H}(\omega)$ prenent com entrada l'excitació $\mathbf{e}(t)$ i com sortida el moviment del sistema \mathbf{q} .

$$\mathbf{H}(\omega) = \left(-\mathbf{M}\omega^2 + \mathbf{C}\omega\mathbf{j} + \mathbf{K}\right)^{-1} \quad \mathbf{Q}(\omega) = \mathbf{H}(\omega)\mathbf{E}(\omega)$$

$\mathbf{Q}(\omega)$ i $\mathbf{E}(\omega)$ són les transformades de Fourier de la sortida i de l'excitació respectivament.

10 Equacions de Lagrange amb multiplicadors

En el desenvolupament que porta a les equacions de Lagrange ordinàries a l'expressió 96, si les velocitats generalitzades \dot{q}_i no són independents, ja sigui perquè el sistema és no holònom o perquè s'ha pres un conjunt de coordenades generalitzades q_i no independents, la igualtat a 0 no implica que els coeficients hagin de ser nuls.



Si per a descriure la configuració del sistema s'han pres n coordenades generalitzades q_i no independents amb m_g equacions d'enllaç geomètriques entre elles, entre les velocitats generalitzades \dot{q}_i existeixen m_g equacions d'enllaç cinemàtiques que provenen de la derivació temporal de les equacions d'enllaç geomètriques i m_h que provenen directament de les condicions d'enllaç no holònomes imposades a les velocitats. Les $m = m_g + m_h$ equacions d'enllaç cinemàtiques són lineals en les velocitats generalitzades i es poden escriure com s'indica a l'expressió 110.

$$\sum_i \phi_{ji} \dot{q}_i = 0 \quad j = 1, \dots, m, \quad i = 1, \dots, n \quad [110]$$

Per tal de trobar una formulació de les equacions del moviment, en aquest cas és convenient fer ús dels conceptes de geometria de vectors. Sigui $\phi_j = \{\phi_{1j}, \dots, \phi_{nj}\}^T$ un vector columna associat a la j -èsima equació d'enllaç cinemàtica. Aquest vector és perpendicular al vector de velocitats generalitzades $\dot{\mathbf{q}}$ segons es desprèn de l'expressió 110 ja que el seu producte escalar és nul. Les m equacions d'enllaç de l'expressió 110 són totes les relacions independents que hi ha entre les velocitats generalitzades; així doncs, permeten definir m vectors linealment independents ϕ_j perpendiculars a $\dot{\mathbf{q}}$ i qualsevol altre vector perpendicular a $\dot{\mathbf{q}}$ ha de ser una combinació lineal d'ells –no pot ser independent ja que si ho fos representaria una equació d'enllaç addicional.

Per comoditat l'expressió 96 es pot escriure com:

$$\sum_i h_i \dot{q}_i = 0 \quad \text{amb} \quad h_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} - Q_i \quad [111]$$

L'expressió 111 posa de manifest que el vector $\mathbf{h} = \{h_1, \dots, h_n\}^T$ és perpendicular a $\dot{\mathbf{q}}$; és per tant, tal com s'ha dit, una combinació lineal de ϕ_j amb coeficients λ_j .

$$\mathbf{h} = \sum_j \lambda_j \phi_j \quad \rightarrow \quad h_i = \sum_j \lambda_j \phi_{ij}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} - Q_i - \sum_j \lambda_j \phi_{ij} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad [112]$$

Les equacions de l'expressió 112 són les anomenades equacions de Lagrange amb multiplicadors; els coeficients λ_j es coneixen com a multiplicadors de Lagrange.



Aquestes n equacions de Lagrange més les m equacions d'enllaç cinemàtiques són un total d' $n + m$ equacions que permeten determinar el moviment del sistema descrit per les n coordenades generalitzades i els m multiplicadors associats a les equacions d'enllaç.

Analitzant les expressions 112, es posa de manifest que cada terme $\lambda_j \phi_{ij}$ és de fet la força generalitzada associada a l'enllaç j i existeix en quant existeix aquest enllaç i per tant les forces que fa. A partir dels components no nuls de força i moment d'un enllaç, es pot determinar l'expressió dels components de la força generalitzada amb les coordenades emprades. De la igualació d'aquestes expressions amb les corresponents de l'expressió 112 es troba la relació entre les forces i moments d'enllaç i els multiplicadors de Lagrange.

10.1 Exemple

A la figura 40, es pot veure un mòbil en forma d'ocell que vat les ales. Per a l'estudi del seu moviment en el pla vertical es modelitza com un mecanisme de 5 barres articulades. Les ales són les barres de massa m i moment central d'inèrcia I , el cos és la partícula de massa m_c situada a P. L'estat del sistema es defineix mitjançant les coordenades generalitzades $\mathbf{q} = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}^T$ i les seves derivades. Com que s'utilitzen 4 coordenades generalitzades i es tracta d'un sistema de 2 coordenades independents –i dos graus de llibertat– cal establir dues equacions d'enllaç geomètriques entre les coordenades emprades. Aquestes equacions es poden obtenir imposant la condició que OQPQ'O'O és un anell tancat i per tant la suma dels vectors que el componen és nul·la, expressió 113. De les equacions d'enllaç geomètriques per derivació s'obtenen les equacions d'enllaç cinemàtiques, expressió 114.

$$\begin{cases} l \cos(\varphi_1) + a \cos(\varphi_3) - a \cos(\varphi_4) - l \cos(\varphi_2) = 0 \\ -l \sin(\varphi_1) + a \sin(\varphi_3) + a \sin(\varphi_4) + l \sin(\varphi_2) - e = 0 \end{cases} \quad [113]$$

$$\begin{pmatrix} -l \sin(\varphi_1) & l \sin(\varphi_2) & -a \sin(\varphi_3) & a \sin(\varphi_4) \\ -l \cos(\varphi_1) & l \cos(\varphi_2) & a \cos(\varphi_3) & a \cos(\varphi_4) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \\ \dot{\varphi}_4 \end{Bmatrix} = 0 \quad [114]$$



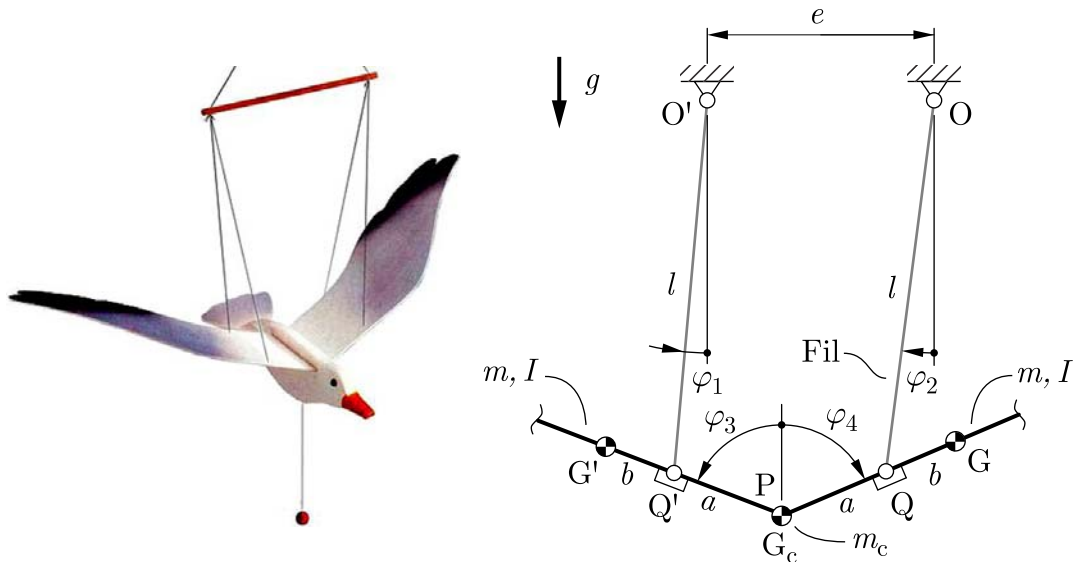


Fig. 40 Mòbil en forma d'ocell i un model per al seu estudi.

L'energia cinètica i l'energia potencial del mòbil es mostren a l'expressió 115.

$$\left\{ \begin{array}{l} E_c = \frac{1}{2} I \dot{\varphi}_3^2 + \frac{1}{2} I \dot{\varphi}_4^2 + \frac{1}{2} m \left((\dot{\varphi}_1 l)^2 + (\dot{\varphi}_3 b)^2 - 2lb \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_3 \cos(\varphi_1 + \varphi_3) \right) + \\ \frac{1}{2} m \left((\dot{\varphi}_2 l)^2 + (\dot{\varphi}_4 b)^2 - 2lb \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_4 \cos(\varphi_2 + \varphi_4) \right) + \\ \frac{1}{2} m_c \left((\dot{\varphi}_1 l)^2 + (\dot{\varphi}_3 a)^2 + 2la \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_3 \cos(\varphi_1 + \varphi_3) \right) \\ E_p = (-mgl - m_c gl) \cos(\varphi_1) + (-mgl) \cos(\varphi_2) + \\ (mgb - m_c ga) \cos(\varphi_3) + mgb \cos(\varphi_4) \end{array} \right. \quad [115]$$

A partir de l'energia cinètica, l'energia potencial i les equacions d'enllaç substituïnt a l'expressió 112 s'obtenen les equacions de Lagrange amb multiplicadors.

$$\left\{ \begin{array}{l}
m l^2 \ddot{\varphi}_1 + (m_c l a - m l b) \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_3) \ddot{\varphi}_3 - \sin(\varphi_1 + \varphi_3) \dot{\varphi}_3^2 \right) + \\
\qquad (m_c + m) g l \sin(\varphi_1) + \lambda_1 l \sin(\varphi_1) + \lambda_2 l \cos(\varphi_1) = 0 \\
m l^2 \ddot{\varphi}_2 + m l b \left(-\cos(\varphi_2 + \varphi_4) \ddot{\varphi}_4 + \sin(\varphi_2 + \varphi_4) \dot{\varphi}_4^2 \right) + \\
\qquad m g l \sin(\varphi_2) - \lambda_1 l \sin(\varphi_2) - \lambda_2 l \cos(\varphi_2) = 0 \\
\left(I + m b^2 + m_c a^2 \right) \ddot{\varphi}_3 + (m_c l a - m l b) \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_3) \ddot{\varphi}_1 - \right. \\
\qquad \left. \sin(\varphi_1 + \varphi_3) \dot{\varphi}_1^2 \right) + (m_c g a - m g b) \sin(\varphi_3) + \\
\qquad \lambda_1 a \sin(\varphi_3) - \lambda_2 a \cos(\varphi_3) = 0 \\
\left(I + m b^2 + \right) \ddot{\varphi}_4 + m l b \left(-\cos(\varphi_2 + \varphi_4) \ddot{\varphi}_2 + \sin(\varphi_2 + \varphi_4) \dot{\varphi}_2^2 \right) - \\
\qquad m g b \sin(\varphi_4) - \lambda_1 a \sin(\varphi_4) - \lambda_2 a \cos(\varphi_4) = 0
\end{array} \right. \quad [116]$$

La resolució d'aquestes equacions junt amb les procedents de les condicions d'enllaç de forma manual és feixuga i difícil. La complexitat de les equacions que sorgeixen de l'estudi dinàmic, sigui quin sigui el procediment per a trobar-les, és habitual en tots els sistemes en els quals la geometria per a l'estudi de les configuracions no és molt simple.

11 Bibliografia

Den Hartog, J. P. (1984) *Mechanical Vibrations*. New York, Dover Publications, Inc.

Rao, S. S. (1995). *Mechanical Vibrations*. USA: Addison-Wesley Company.

Thomson, W. T., Dahleh, M. D. (1998). *Theory of Vibration with Applications*. New Jersey, Prentice-Hall, Inc.

Cardona, S., Clos, D. (2008). *Teoria de Màquines*. Barcelona. Ed. UPC.

