Escola Tècnica Superior d'Enginyers Industrials de Barcelona

Teoria de Màquines

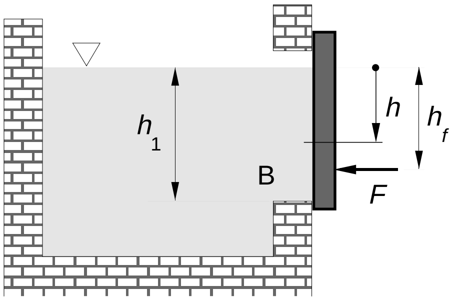
Problemes elementals d'hidrostàtica

Salvador Cardona
Daniel Clos

1998

Departament d'Enginyeria Mecànica

EXERCICI 6-1



$h_1 = 2$ m $\rho = 1$ kg / dm^3

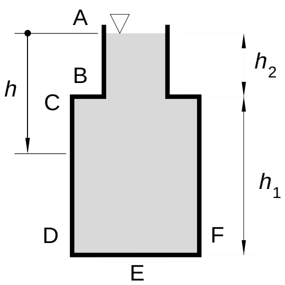
El dipòsit d'aigua de la figura disposa d'una comporta rectangular d'amplada $b = 1$ m. Es desitja mantenir la comporta tancada aplicant-li una força horitzontal F situada a una alçària h_f respecte a la superfície lliure de l'aigua. Determineu:

a) Distribució de la pressió sobre la comporta.

b) La força resultant que l'aigua fa sobre la comporta.

c) L'alçària h_p del centre de pressió de la comporta.

EXERCICI 6-2



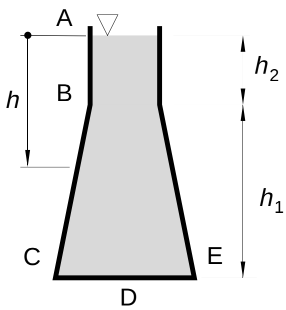
$h_1 = 0{,}8$ m $h_2 = 0{,}2$ m

El dipòsit de la figura conté aigua. Dibuixeu, indicant les escales, la distribució de pressió relativa:

a) En el fons DF del dipòsit.

b) En les parets AB i CD del dipòsit.

EXERCICI 6-3



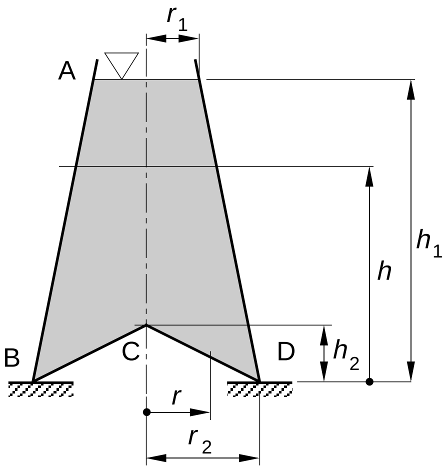
$h_1 = 0{,}8$ m $h_2 = 0{,}2$ m

El dipòsit de la figura conté aigua. Dibuixeu, indicant les escales, la distribució de pressió relativa:

a) En el fons CE del dipòsit.

b) En les parets AB i BC del dipòsit

EXERCICI 6-4



$h_1 = 2$ m	$h_2 = 0{,}4$ m
$r_1 = 0{,}4$ m	$r_2 = 0{,}8$ m

El dipòsit de revolució de la figura conté aigua. Dibuixeu, indicant les escales, la distribució de pressió relativa:

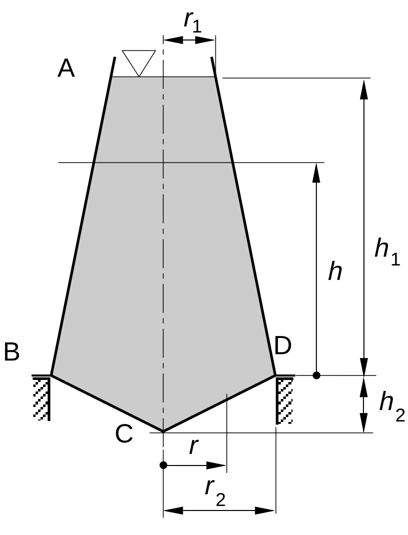
a) $p(h)$ en la paret lateral AB del dipòsit.

b) $p(r)$ en el fons BCD del dipòsit.

Determineu:

c) La força resultant que suportaria el fons BCD a causa de la pressió relativa si fos pla.

EXERCICI 6-5



$h_1 = 2$ m	$h_2 = 0{,}4$ m
$r_1 = 0{,}4$ m	$r_2 = 0{,}8$ m

El dipòsit de revolució de la figura conté aigua. Dibuixeu, indicant les escales, la distribució de pressió relativa:

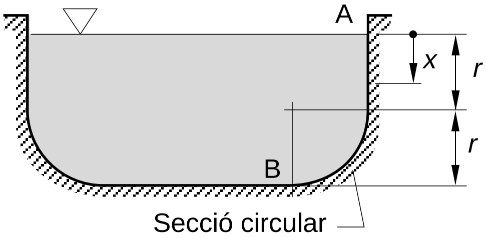
a) $p(h)$ en la paret lateral AB del dipòsit.

b) $p(r)$ en el fons BCD del dipòsit.

Determineu:

d) la força resultant que suportaria el fons BCD a causa de la pressió relativa si fos pla.

EXERCICI 6-6



r = 1m	b = 2 m
$\rho = 10^3$ kg/m^3	g = 10 m/s^2

Per al dipòsit d'aigua de la figura,

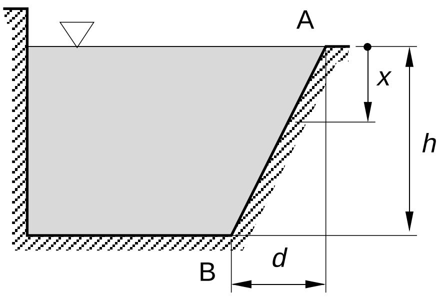
a) Dibuixeu la distribució de la pressió relativa $p(x)$ a la paret AB. Indiqueu les escales.

Si l'amplada del dipòsit és b = 2 m constant, determineu de la resultant de les forces causades per la pressió relativa sobre la paret AB

b) La component vertical.

c) La component horitzontal.

EXERCICI 6-7



h = 3 m	d = 1,5 m	b = 2 m
g = 10 m/s^2	$\rho = 10^3$ kg/m^3	

Per al dipòsit d'aigua de la figura,

a) Dibuixeu la distribució de la pressió relativa $p(x)$ a la paret AB. Indiqueu les escales.

Si l'amplada del dipòsit és b = 2 m constant, determineu de la resultant de les forces causades per la pressió relativa sobre la paret AB

b) La component vertical.

c) La component horitzontal.

Solucions

E 6-1 a) Funció de la profunditat h a partir de la superfície lliure la pressió (relativa) $p(h)$ causada per l'aigua és

$$p(h) = \rho g h = 10^4 h \ \text{Pa} \qquad (0\ \text{m} \le h \le 2\ \text{m})$$

b) La resultant F_R de les forces exercides per l'aigua és $F_R = \rho g S h_G$ essent S la superfície de la comporta dins de l'aigua i h_G la profunditat respecte a la superfície lliure del baricentre d'aquesta superfície. F_R = 20 kN.

c) La profunditat del centre de pressió (punt respecte al qual el sistema de forces causades per l'aigua és equivalent a una força única) ve donada per l'expressió

$h_p = \dfrac{I_G}{h_G S} + h_G$ on $I_G = \dfrac{1}{12} b h_1$ és el moment de segon ordre de la superfície de la comporta dins de l'aigua respecte a l'eix horitzontal que passa pel seu baricentre. h_p= 1,333 m.

L'equilibri horitzontal de la comporta s'aconsegueix només amb la força F si aquesta s'aplica a l'alçada del centre de pressió.

E 6-2 a) La pressió en el fons DF del dipòsit és uniforme ja que tot ell es troba a la mateixa profunditat sota la superfície lliure. $p = \rho g (h_1 + h_2) = 10^4$ Pa.

b) Pel que fa a la geometria la pressió a les parets només depèn de la profunditat sota la superfície lliure (Equació fonamental de la hidrostàtica d'un fluid incompressible). Així doncs la distribució de pressió relativa $p(h)$ és lineal amb la profunditat.

$$p(h) = \rho g \left((h_1 + h_2) - h \right) = 10^4 (1 - h) \qquad (0\ \text{m} \le h \le 1\ \text{m}).$$

E 6-3 La solució és idèntica a la de l'exercici anterior E 6-2.

E 6-4 a) De manera anàloga als exercicis anteriors

$$p_{paret}(h) = \rho g (h_1 - h_2) = 10^4 (2 - h) \qquad (0\ \text{m} \le h \le 2\ \text{m}).$$

b) Per determinar $p(r)$ cal primer trobar la profunditat $h_{fons}(r)$ d'un punt del fons en funció de radi r.

$$h_{fons}(\rho) = h_1 - \frac{h_2}{r_2}(r_2 - r) = 1{,}6 + 0{,}5 r$$

$$p_{fons}(r) = \rho g h_{fons} = 10^4 (1{,}6 + 0{,}5 r) \qquad (0\ \text{m} \le r \le 0{,}8\ \text{m}).$$

c) Si el fons fos pla la pressió en ell seria uniforme de valor $p_{paret}(0) = 2 \cdot 10^4$ Pa i per tant la força resultant seria $F = p\,s = 2 \cdot 10^4 \pi\, 0{,}8^2 = 62{,}83$ kN.

E 6-5 Respecte a la solució de l'exercici anterior només canvia l'expressió de la profunditat del fons i la distribució de pressió en ell.

$$h_{\text{fons}}(\rho) = (h_1 + h_2) - \frac{h_2}{r_2}(r) = 2{,}4 - 0{,}5\,r$$

$$p_{\text{fons}}(r) = \rho\,\mathrm{g}\,h_{fons} = 10^4(2{,}4 - 0{,}5\,r) \qquad (0 \text{ m} \le r \le 0{,}8 \text{ m}).$$

E 6-6 a) De manera anàloga als exercicis anteriors $p(x) = \rho\,\mathrm{g}\,x = 10^4\,x$ Pa $\quad (0 \text{ m} \le x \le 2 \text{ m})$.

b),c) El volum d'aigua delimitat per la paret AB, un pla vertical per B i un pla horitzontal per A (la superfície lliure) està en equilibri. Si només es considera la pressió relativa en el diagrama de cos lliure d'aquest volum intervenen:

En direcció vertical: el pes de l'aigua i la component vertical de la força resultant que fa la paret a l'aigua (a causa de la pressió relativa).

En direcció horitzontal: la resultant de les forces sobre el pla vertical causades per la pressió relativa a l'interior de l'aigua i la component horitzontal de la força resultant que fa la paret a l'aigua (a causa de la pressió relativa).

Es pren sentit positiu cap amunt per a la direcció vertical i cap a la dreta per a la direcció horitzontal.

$$\sum F_{\text{v}} = -m\,\mathrm{g} + F_{\text{v paret}\to\text{aigua}} = 0 \quad \text{d'on}$$

$$F_{\text{v aigua}\to\text{paret}} = -m\,\mathrm{g} = -V\,\rho\,\mathrm{g} = -\left(r^2 + \frac{r^2}{4}\right)b\,10^4 = \text{-35,71 kN.}$$

$$\sum F_{\text{h}} = \rho\,\mathrm{g}\,S\,h_G + F_{\text{h paret}\to\text{aigua}} = 0 \quad \text{d'on}$$

$$F_{\text{h aigua}\to\text{paret}} = \rho\,\mathrm{g}\,S\,h_G = 10^4(2\,r\,b)\,r = 40{,}00 \text{ kN.}$$

E 6-7 a) De manera anàloga als exercicis anteriors $p(x) = \rho\,\mathrm{g}\,x = 10^4\,x$ Pa $\quad (0 \text{ m} \le x \le 3 \text{ m})$.

b),c) De la mateixa manera que en l'exercici anterior

$$\sum F_{\text{v}} = -m\,\mathrm{g} + F_{\text{v paret}\to\text{aigua}} = 0 \quad \text{d'on}$$

$$F_{\text{v aigua}\to\text{paret}} = -m\,\mathrm{g} = -V\,\rho\,\mathrm{g} = -\frac{1}{2}\,d\,h\,b\,10^4 = -45{,}00 \text{ kN.}$$

$$\sum F_{\text{h}} = \rho\,\mathrm{g}\,S\,h_G + F_{\text{h paret}\to\text{aigua}} = 0 \quad \text{d'on}$$

$$F_{\text{h aigua}\to\text{paret}} = \rho\,\mathrm{g}\,S\,h_G = 10^4(h\,b)\frac{h}{2} = 90{,}00 \text{ kN.}$$